
Schwingungsbeeinflussung geometrisch komplexer Struk- turen mittels piezoelektrischer Flächenwandler am Beispiel des Getriebeheulens

Vibration control of geometrically complex structures by means of piezoelectric patch transducers: Gear whine in a manual transmission

Zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation von Dipl.-Ing. Britta Späh aus Nördlingen

Oktober 2015 — Darmstadt — D 17



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Maschinenbau
Institut für Mechatronische Systeme
im Maschinenbau

Schwingungsbeeinflussung geometrisch komplexer Strukturen mittels piezoelektrischer Flächenwandler am Beispiel des Getriebeheulens

Vibration control of geometrically complex structures by means of piezoelectric patch transducers: Gear whine in a manual transmission

Genehmigte Dissertation von Dipl.-Ing. Britta Späh aus Nördlingen

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Stephan Rinderknecht

2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Tobias Melz

Tag der Einreichung: 01.07.2014

Tag der Prüfung: 21.10.2014

Darmstadt — D 17

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-50034

URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/5003>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

tuprints@ulb.tu-darmstadt.de



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung – Keine kommerzielle Nutzung – Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als Wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Technischen Universität Darmstadt. Prof. Rainer Nordmann danke ich, mir trotz des bevorstehenden Wechsels der Institutsleitung die Möglichkeit geboten zu haben, im Bereich der Mechatronik zu promovieren. Für die Übernahme der fachlichen Betreuung bedanke ich mich bei Prof. Stephan Rinderknecht, welcher seither das *Institut für Mechatronische Systeme im Maschinenbau* (IMS) leitet. Die Zeit am IMS habe ich sehr genossen, was maßgeblich am gegebenen Freiraum und der dort gelebten Kultur lag. Schließlich gilt mein Dank Prof. Tobias Melz, nicht nur für die Übernahme des Co-Referates sondern insbesondere für die Möglichkeit, meine Promotion an seinem Fachgebiet *Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik* (SzM) abzuschließen.

Neben den offiziellen fachlichen Betreuern haben auch die Kollegen am IMS und SzM zur Qualität der Zeit an der TU Darmstadt beigetragen. Dies gilt besonders für Sven, Simon, Marlene, Philipp, Sebastian, Hendrik, Alex, Ursula, Jean, Birgit, Sabine, Andreas, Michi, Lukas, Christian und Oli.

Robert Rauch, Andreas Wirnitzer und Andreas Biesewski haben mich durch ihre Diplom- und Masterarbeiten bei der Bearbeitung des Themenkomplexes unterstützt, wofür ich mich ebenfalls bedanke.

Mein herzlichster Dank geht an Simon, Stefan und Dietmar für die wertvollen Korrekturvorschläge zu dieser Arbeit. Ebenso an Hendrik, dessen Unterstützung mir mehr als einmal bei der Fertigstellung dieser Arbeit geholfen hat.

Kurzfassung

Das vor allem im Automobilbereich bekannte Getriebeheulen ist ein tonales Störgeräusch, welches unter bestimmten Betriebsbedingungen durch die periodische Belastung der einzelnen Zähne der im Eingriff befindlichen Zahnräder angeregt wird. Die Folge sind resonante Gehäuse-schwingungen, die als akustische Komfortbeeinträchtigung wahrgenommen werden.

Bislang werden nur passive Maßnahmen eingesetzt, um diesem Problem zu begegnen. In der vorliegenden Arbeit werden passive und aktive Ansätze numerisch untersucht, um bei verschiedener Verwendung piezoelektrischer Flächenwandler eine Schwingungsminderung zu realisieren. Für die Simulation dieser Ansätze wird ein vom Getriebehersteller zur Verfügung gestelltes, räumlich hoch aufgelöstes Finite-Elemente-Modell verwendet. Dieses wird zunächst an die dynamischen Eigenschaften des realen Systems, die mittels einer experimentellen Modalanalyse identifiziert werden, abgeglichen. Anhand dieses Modells wird die für das Getriebeheulen verantwortliche Eigenform identifiziert und geeignete Aktorpositionen bestimmt, auf die im FE-Modell piezoelektrische Flächenwandler integriert werden. Das so entstandene elektromechanisch gekoppelte Gesamtsystem, bestehend aus Getriebe und Flächenwandler, wird reduziert und für zeiteffiziente Simulationen der verschiedenen Ansätze verwendet.

Beim passiven Shunt-Damping werden dabei mehrere Flächenwandler jeweils mit einem Widerstand und einer Induktivität zu elektrischen Schwingkreisen kombiniert, die eine zu mechanischen Tilgern äquivalente Wirkung aufweisen. Über einen klassischen und einen neu entwickelten Ansatz zur Auslegung solcher Multi-Shunt-Systeme wird eine geringe Schwingungsamplitudenreduktion des Getriebegehäuses erreicht, wobei der neu entwickelte Ansatz dem klassischen überlegen ist. Für eine praktische Umsetzung sind die erreichbaren Reduktionen jedoch nicht ausreichend.

Das Potential aktiver Ansätze wird über eine untersuchte optimale Störgrößenaufschaltung abgeschätzt. Hierauf aufbauend wird eine realitätsnahe Simulation unter Berücksichtigung der dynamischen Eigenschaften des Leistungsverstärkers und der digitalen Echtzeitdatenverarbeitung eines einzelnen über den FxLMS-Algorithmus angesteuerten Flächenwandlers durchgeführt. Mit dieser Methode werden bereits bei der Verwendung eines einzelnen Aktors deutliche Reduktionen erreicht. Die kombinierte Anwendung mehrerer über diesen Algorithmus angesteuerten Flächenwandler ermöglicht deutliche Amplitudenreduktionen, erfordern andererseits jedoch erheblichen Aufwand insbesondere hinsichtlich der benötigten Leistungsverstärker. Abschließend wird somit eine praktische Umsetzung dieses Ansatzes nur eingeschränkt empfohlen.

Abstract

Gear-whining is an acoustic phenomenon especially known in the automotive industry. Under certain operation conditions periodic teeth-meshing-forces excite resonant vibrations of the transmission-housing. The resulting tonal noise is often perceived as an acoustic comfort-impairment.

So far, only passive measures are used to address this problem. In the present work, passive and active approaches utilizing piezoelectric patch transducers are investigated numerically, in order to assess the attainable vibration reductions. A finite element model with high spatial resolution is used which is provided by the transmission manufacturer. In order to gain realistic results the FE model is adapted to the dynamic properties of the real transmission which are identified by an experimental modal analysis. The eigenform which is source of the gear-whining is identified and appropriate actuator positions are determined where piezoelectric patch transducers are integrated in the FE model. The resulting electro-mechanically coupled complete system model, consisting of transmission and patch transducers, is reduced and used for time-efficient simulations of the different approaches.

In the case of passive shunt damping each piezoelectric patch transducer is combined with a resistor and an inductor. The resulting oscillator circuits show an effect that is equivalent to mechanical vibration absorbers. A classic and a newly developed approach of designing such multi-shunt systems are applied. With the first mentioned an vibration amplitude reduction of the housing of 2.9 dB is attained. The new approach is superior to this one and gains a reduction of 3.6 dB. However, for a practical implementation the achievable reductions are not sufficient.

The potential of the active approach is investigated by an optimal feedforward-control. Based on the results, a simulation of a single patch transducer which is controlled by a FxLMS-algorithm is performed. The realistic model used in this simulation considers dynamic properties of power amplifiers and real-time digital signal processing systems. With this algorithm significant higher reductions than with the passiv approach can be achieved. The combined use of several such controlled patch transducers enables amplitude reductions in a range, where a practical implementation seems feasible. However, this approach requires a considerable effort regarding the hardware, particularly the needed power amplifiers. Therefore only a restricted recommendation for a practical implementation is made.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ausgangssituation	1
1.2	Motivation und Stand der Technik	2
1.3	Lösungsansatz und Struktur der Arbeit	3
2	Experimentelle Modalanalyse	7
2.1	Grundlagen	7
2.2	Bestimmung der Modellordnung	10
2.3	Parameterschätzverfahren	11
2.3.1	Einfreiheitsgrad-Verfahren	12
2.3.2	Mehrfreiheitsgrad-Verfahren	12
2.3.3	Frequency Polyreference Verfahren	13
2.4	Versuchsaufbau und Messausrüstung	14
2.5	Messdurchführung	16
2.6	Messauswertung und -ergebnisse	17
2.6.1	Messqualität	17
2.6.2	Bestimmung der Modellordnung	26
2.6.3	Zwischenfazit zur Bestimmung der Modellordnung	30
2.6.4	Ergebnis der Parameterschätzung	30
2.6.5	Ergebnis der Eigenformschätzung	32
2.6.6	Vergleich der gemessenen und der analytisch bestimmten Frequenzgänge	38
2.7	Fazit zur experimentellen Modalanalyse	39
3	Numerische Modalanalyse am Finite-Elemente-Modell	41
3.1	Beschreibung des Ausgangsmodells	42
3.2	Beschreibung des Referenzmodells	47
3.3	Vereinfachende Annahmen bei der Modellerstellung	48
3.4	Numerische Modalanalyse des Referenzmodells	49
3.5	Grundlagen des Modellabgleichs	52
3.6	Zuordnung der experimentellen zu den numerischen Ergebnissen	53
3.7	Parameterstudie	55
3.8	Modellanpassung hinsichtlich Eigenfrequenzen	61
3.9	Ergebnisse der numerischen Modalanalyse des abgeglichenen FE-Modells	64
3.10	Erweiterung des abgeglichenen Modells	66
4	Elektromechanische Schwingungsbeeinflussung der Heul-Eigenform	69
4.1	Grundlagen piezoelektrischer Keramiken	69

4.2	Modellierung der piezoelektrischen Flächenwandler	71
4.3	Optimierung des Kopplungsfaktors	73
4.4	Modellierung des elektromechanisch gekoppelten Gesamtsystems	75
4.5	Export relevanter Systemmatrizen aus dem FE-Modell	79
4.5.1	Mechanisches Grundsystem	79
4.5.2	Elektrische und elektromechanische Kopplungsmatrizen	79
4.6	Passives Shunt Damping	81
4.6.1	Auslegung des monofrequenten Multi-Shunt-Systems	84
4.6.2	Konzept des verstimmten Multi-Shunt-Systems	85
4.6.3	Verfahren zur iterativen Auslegung eines verstimmten Multi-Shunt-Systems	87
4.6.4	Fazit zum passiven Shunt Damping	90
4.7	Störgrößenaufschaltung	91
4.7.1	Grundlagen der Optimalen Störgrößenaufschaltung	91
4.7.2	Implementierung am Getriebemodell	92
4.7.3	Verwendung eines einzelnen Flächenwandlers	93
4.7.4	Realitätsnahe Simulation des FxLMS	99
4.7.5	Ergebnisse des FxLMS-Algorithmus	103
4.7.6	Konsequenzen für eine praktische Umsetzung	108
4.8	Vergleich der erreichbaren Amplitudenreduktionen	109
5	Zusammenfassung und Ausblick	111
A	Experimentelle Modalanalyse	113
A.1	Grundlagen	113
A.2	Gemessene Frequenzgänge	113
A.3	Mode Indicator Functions	114
A.4	Experimentell ermittelte Eigenformen	116
A.5	Vergleich der gemessenen und analytischen Frequenzgänge	128
B	Numerische Modalanalyse	129
B.1	Numerisch ermittelte Eigenformen des Referenzmodells	129
C	Elektromechanische Schwingungsbeeinflussung	135
	Literaturverzeichnis	138

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben

Symbol	Bedeutung
--------	-----------

A	Grundfläche	80
A	Amplitude	89
\mathbf{A}	Systemmatrix	77
$A_{\text{stör}}$	Amplitude der Störanregung	93
$A(\omega_j)$	Diskrete Fouriertransformierte des Beschleunigungssignals	8
a_l	modaler Skalierungsfaktor	8
a_n	Beschleunigungsantwort an Freiheitsgrad n	7
\mathbf{B}	Eingangsmatrix	77
ba	Messposition auf der Rückseite des Getriebes (back)	20
bo	Messposition auf der Unterseite des Getriebes (bottom)	20
C	Kapazität	82
\mathbf{C}	Ausgangsmatrix	77
\mathbf{C}_{pp}	mechanische Dämpfungsmatrix	76
\mathbf{D}	Vektor der dielektrischen Verschiebungen	69
\mathbf{D}	Durchgangsmatrix	77
d	Störgröße	91
\mathbf{d}	Matrix der piezoelektrischen Ladungskonstanten	69
D_l	modaler Dämpfungsgrad der l . Mode	7
E	Elastizitätsmodul	62
E	Feldstärke	98
\mathbf{E}	Vektor der elektrischen Felder	69

F	mechanischer Kraftvektor	76
f	Frequenz	66
F_N	Normalkraft	93
F_t	Tangentialkraft	93
$F(\omega_j)$	Diskrete Fouriertransformierte des Kraftsignals	8
f_A	untere Frequenz	84
f_B	obere Frequenz	84
f_e	Resonanzfrequenz des elektrischen Schwingkreises	82
f_H	Heulfrequenz	1
f_m	Kraftanregung an Freiheitsgrad m	7
f_r	Messposition auf der Vorderseite des Getriebes (front)	20
G	Sensitivitätsmatrix	52
H	Übertragungsfunktion	7
H	Übertragungsfunktionsmatrix / Frequenzgangmatrix	8
h	Offset der Ausgleichsgeraden	63
h	Höhe, Dicke	98
H_{power}	Summe der quadrierten Frequenzgänge	10
H_{rd}	Übertragungsfunktion von Störanregung zu Referenz	91
H_{ru}	Übertragungsfunktion von Kompensationsanregung zu Referenz	91
H_{ru}^*	Übertragungsfunktion der Sekundärstrecke	99
I	Einheitsmatrix	9
i	$\sqrt{-1}$	8
i	Übersetzung	66
J	Anzahl der Messzeitpunkte	7
J	Anzahl der Shunts	82
J	Gütemaß	92

j	j . Messzeitpunkt	7
K	Anzahl der Messungen	7
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix	41
k	elektromechanischer Kopplungsfaktor	70
\mathbf{K}^c	elektrische Konduktivitäts-Koeffizienten-Matrix	78
$\mathbf{K}_{\phi\phi}$	elektrische Permittivitätsmatrix	76
$\mathbf{K}_{\phi p}$	elektromechanische Kopplungsmatrix	76
$\mathbf{K}_{\text{piezo}}$	Steifigkeitsmatrix der Flächenwandler	79
$\mathbf{K}_{p\phi}$	elektromechanische Kopplungsmatrix	76
\mathbf{K}_{pp}	mechanische Steifigkeitsmatrix	76
L	Anzahl der Eigenfrequenzen, -formen, Dämpfungswerte	7
L	Induktivität	82
l	Länge des Adapters	63
M	Anzahl der Anregungs-Freiheitsgrade	7
\mathbf{M}	Massenmatrix	41
MAC_{jk}	Eintrag in der MAC-Matrix an Position j, k	37
M_{an}	antriebsseitiges Zugmoment	93
\mathbf{M}_{pp}	mechanische Massenmatrix	76
N	Anzahl der Antwort-Freiheitsgrade	7
n	natürliche Zahl	20
n	Drehzahl	66
n_w	Wellendrehzahl	1
\mathbf{P}	Beteiligungsmatrix	9
\mathbf{p}	mechanischer Auslenkungsvektor	76
p	Ordnung des Nenner-Matrix-Polynoms	9
\mathbf{P}_l	Beteiligungs-Vektor der l . Mode	7

\mathbf{p}_{mech}	mechanische Auslenkungen	78
Q	Ladung	93
\mathbf{Q}	elektrischer Ladungsvektor	76
q	Ordnung des Zähler-Matrix-Polynoms	9
\mathbf{q}	Vektor der modalen Freiheitsgrade	76
R	elektr. Widerstand	82
$R_{2,t}$	Teilkreisradius des treibenden Zahnrades, zweiter Gang	93
$Rot_{x,y,z}$	rotatorische Freiheitsgrade	46
\mathbf{R}_l	Residuen-Matrix der l . Mode	7
\mathbf{S}	Vektor der mechanischen Dehnungen	69
\hat{S}_{aa}	Autoleistungsdichte des Beschleunigungssignals	17
\hat{S}_{fa}	Kreuzleistungsdichte des Kraft- und Beschleunigungssignals	8
\hat{S}_{ff}	Autoleistungsdichte des Kraftsignals	8
S_R	Skalierungsfaktor	84
\mathbf{s}_E	Matrix der Elastizitätskonstanten bei konst. elektrischer Feldstärke	69
\mathbf{T}	Vektor der mechanischen Spannungen	69
t	Zeit	7
T_t	Totzeit	101
t_k	diskrete Zeit	99
to	Messposition auf der Oberseite des Getriebes (top)	20
U	Spannung	98
u	Kompensationsanregung	91
\mathbf{u}	Eingangsvektor	77
$U_{x,y,z}$	translatorische Freiheitsgrade	46
u_{opt}	optimale Aktor-Stellgröße	92
\mathbf{V}	Modalmatrix	76

w	Messposition auf der Welle (w).....	20
w_c	adaptives Filtergewicht	100
w_s	adaptives Filtergewicht	100
\mathbf{x}	Zustandsvektor	77
x_{ref}	Referenzsignal	99
x_{ref}^*	gefiltertes Referenzsignal.....	99
$x(\omega_j)$	Diskrete Fouriertransformierte der Auslenkung	49
\mathbf{y}	Ausgangsvektor	77
y_A	Ausgleichsgerade	63
y_r	Referenzsignal	91
$y_{r,d}$	Auslenkung an Referenzposition in Folge Störung.....	92
$y_{r,du}$	Auslenkung an Referenzposition in Folge Störung und Kompensation	92
z	Zähnezahl	1

Griechische Buchstaben

Symbol	Bedeutung	
α	Koeffizient des Nenner-Matrix-Polynoms.....	9
α	Eingriffswinkel.....	93
$\mathbf{\alpha}$	Nenner-Koeffizienten-Matrix	9
α_{LMS}	Konstante zur Schrittweitenbestimmung	101
β	Koeffizient des Zähler-Matrix-Polynoms.....	9
β	Strafterm	92
$\mathbf{\beta}$	Zähler-Koeffizienten-Matrix	9
γ	Schrägungswinkel	93
$\hat{\gamma}^2$	Kohärenz	17

Δ	Steigung der Ausgleichsgeraden	63
ϵ_T	Matrix der Permittivitäten bei konstanter mechanischer Spannung	69
λ_l	l . Eigenwert	7
μ	Schrittweite	101
ν	Vergessensfaktor	101
ρ	Dichte	73
Φ_{pz}	pz . Parameterwert	52
ϕ	elektrischer Potentialvektor	76
φ	Drehwinkel	100
$\varphi_{W,an}$	Drehwinkel der Eingangswelle	100
Ψ	Eigenvektor-Matrix	9
ψ_l	l . Eigenvektor / -form	7
ψ_{lM}	Anteil des l . Eigenvektors, den Anregungs-Freiheitsgr. zugeordnet	8
ψ_{lN}	Anteil des l . Eigenvektors, den Antwort-Freiheitsgr. zugeordnet	8
ω	Kreisfrequenz	7
$\omega_{0,l}$	l . Eigenkreisfrequenz	7
ω_e	Resonanzkreisfrequenz des elektrischen Schwingkreises	82
ω_j	j . Frequenzstützstelle	8

Indizes

Symbol	Bedeutung	
$2, t$	2. Gang, treibendes Zahnrad	66
A	Ausgleichsgerade	63
AA	Anti-Alias-Filter	101
C	Kapazität	82

<i>cc</i>	kurzgeschlossene Elektroden	70
<i>d</i>	Störung	91
<i>E</i>	E-Modul	63
<i>e</i>	Eckfrequenz	101
<i>ein</i>	Eingang	66
<i>elek</i>	elektrisch	98
<i>ext</i>	extern	93
<i>FV</i>	Festverzahnung	66
<i>ideal</i>	ideal	63
<i>j</i>	j. numerisch ermittelter Eigenvektor	37
<i>j</i>	j. Shunt	82
<i>k</i>	k. Messung	7
<i>k</i>	k. experimentell ermittelter Eigenvektor	37
<i>L</i>	Induktivität	82
<i>l</i>	l. Eigenfrequenz, -form, Dämpfungsgrad	7
<i>m</i>	Anregungs-Freiheitsgrad	7
<i>max</i>	maximal	63
<i>min</i>	minimal	63
<i>N</i>	normal	93
<i>n</i>	Antwort-Freiheitsgrad	7
<i>oc</i>	geöffnete Elektroden	70
<i>opt</i>	optimal	92
<i>p</i>	Ordnung des Nenner-Matrix-Polynoms	9
<i>q</i>	Ordnung des Zähler-Matrix-Polynoms	9
<i>R</i>	elektr. Widerstand	82
<i>r</i>	Referenz	91

Ref	Referenz.....	63
ref	Referenz.....	99
s	Sampling.....	101
s	Anzahl der Keramikschichten.....	102
t	tangential.....	93
u	Aktor-Stellgröße zur Kompensation.....	91
x	Referenzsignal.....	100

Operatoren

Symbol	Bedeutung	
x^*	komplex konjugierte Zahl zu x	8
$[x_l]$	Diagonalmatrix mit den Einträgen x_l auf der Diagonalen.....	9
\mathbf{x}^T	Transponierte von \mathbf{x}	8

Abkürzungen

Symbol	Bedeutung	
A/D	Analog-Digital-Wandler.....	99
ba	Rückseite des Getriebes (back).....	16
bo	Unterseite des Getriebes (bottom).....	16
C	Filter.....	99
D/A	Digital-Analog-Wandler.....	99
FE	Finite-Elemente.....	41
FV	Festverzahnung.....	43
$FxLMS$	Filtered-x Least Mean Square.....	99
fr	Vorderseite des Getriebes (front).....	16

<i>LC</i>	elektr. Schwingkreis aus Induktivität und Kapazität	81
<i>MIF</i>	Mode Indicator Function	11
<i>MMIF</i>	Multivariate Mode Indicator Function	11
<i>RLC</i>	elektr. Schwingkreis aus Widerstand, Induktivität und Kapazität	81
<i>to</i>	Oberseite des Getriebes (top)	16
<i>w</i>	Welle	16

1 Einleitung

In dieser Arbeit wird die elektromechanische Beeinflussbarkeit von Schwingungen komplexer Strukturen mittels piezoelektrischer Flächenwandler behandelt. Als konkreter Anwendungsfall dient die Minderung des akustischen Phänomens des Getriebeheulens eines manuellen Automobilschaltgetriebes, das unter bestimmten Lastbedingungen aufgrund resonanten Verhaltens auftritt. An diesem Beispiel wird ein prinzipielles Vorgehen entwickelt, mit dem unerwünschte periodische Gehäuseschwingungen durch gezielte Positionierung, Auslegung und Verwendung piezoelektrischer Flächenwandler minimiert werden. Die gesamte Untersuchung erfolgt numerisch anhand eines Finite-Elemente-Modells des Getriebes, welches auf die Ergebnisse einer experimentellen Modalanalyse abgestimmt wird.

1.1 Ausgangssituation

Das Getriebeheulen, bekannt vor allem im Automobilbereich, ist ein tonales Störgeräusch, welches durch die periodische Belastung der einzelnen Zähne der im Eingriff befindlichen Zahnräder angeregt wird. Ursachen sind nach [1, 2] beispielsweise:

- Zahnfehler (Zahnflankenfehler, Teilungsfehler),
- Parameteranregung (schwellende Zahnfedersteifigkeiten),
- Eingriffsstöße oder
- lastbedingte Verformungen der Getriebewellen.

In modernen Automobilschaltgetrieben wird ursachenseitig der Anregung durch Zahnfehler mit geringen Fertigungstoleranzen und damit hohen Verzahnungsqualitäten begegnet. Hohe Überdeckungsgrade der Verzahnungen und damit geringere Schwankungen der Verzahnungssteifigkeit minimieren Parameteranregungen. Eingriffsstöße sind die Folge von lastbedingten Abweichungen vom Verzahnungsgesetz. Diese werden durch hohe Verzahnungs- und Wellenbiegesteifigkeiten reduziert. Auswirkungsseitig dienen konstruktive Maßnahmen zur Versteifung der abstrahlenden Gehäusestruktur sowie Dämmmaterialien auf der Gehäuseoberfläche dem Abschwächen des Getriebeheulens. All diese Maßnahmen sind mit steigenden Produktionskosten und teils höheren Massen verbunden. Auch nach Umsetzung all dieser Maßnahmen bildet sich bei manchen Getrieben unter bestimmten, getriebespezifischen Betriebsbedingungen das Getriebeheulen als störendes Geräusch aus. Fehlt außerdem die maskierende Wirkung anderer Betriebsgeräusche, wie beispielsweise die der Verbrennungskraftmaschine oder Windgeräusche, wird das Getriebeheulen auch von Fahrern ohne geschultes Gehör als Komfortbeeinträchtigung wahrgenommen. Insbesondere für diese Fahrer erscheint das seltene Auftreten teils stochastisch, was Reklamationen oder Werkstattbesuche zur Folge haben kann. Da zukünftig eine weitere Abnahme der Maskierungsgeräusche zu erwarten ist und bereits heute besonderer Aufwand erforderlich ist, dieses Phänomen abzuschwächen, wird in der vorliegenden Arbeit nach Verbesserungspotential zur Reduzierung des Getriebeheulens gesucht. Hierfür wird eine Prüf-

standkonfiguration untersucht, bei der das Getriebeheulen angeregt wird, wenn die Frequenz der Verzahnungsanregung in den Frequenzbereich einer ausgeprägten Resonanz des Getriebegehäuses fällt. Trotz geringer Maskierungsgeräusche des Prüfstands kommt es nur in einem sehr schmalen Betriebsbereich zum Getriebeheulen: Lediglich bei eingelegtem zweiten Gang, einer Motordrehzahl im Bereich von 2000 min^{-1} bis 2600 min^{-1} und einem Lastmoment von ca. 240 Nm tritt es auf. Die Frequenz f_H dieses Phänomens hängt dabei von der Zähnezahl z der beteiligten Zahnräder ab und ist proportional zur Wellendrehzahl n_W . Die maximale Ausprägung erreicht das Getriebeheulen bei ca. 680 Hz .

1.2 Motivation und Stand der Technik

Aus der beschriebenen Ausgangssituation geht unmittelbar die primäre Motivation für die Schwingungsminderung des Getriebeheulens hervor; steigende Komfortansprüche bei gleichzeitig sinkenden Maskierungsgeräuschen bedingen die Forderung nach der Vermeidung oder zumindest Reduzierung des Getriebeheulens. Die Zahl der Elektrofahrzeuge, bei denen die Verbrennungskraftmaschine und damit die bedeutendste Quelle für Maskierungsgeräusche fehlt, ist derzeit zwar noch vergleichsweise gering, wird jedoch in den kommenden Jahren weiter zunehmen. Insbesondere hier kann das Getriebeheulen zu einem signifikanten Störgeräusch werden. Auch bei herkömmlichen Fahrzeugen widerspricht die allgemeine Forderung nach sinkenden Produktionskosten und immer leichteren Fahrzeugen in vielen Fällen der passiven Beeinflussung durch geringere Fertigungstoleranzen oder Strukturversteifungen.

Diesen Konflikt behandeln auch Eulert et al. in dem Artikel *Aktive Geräuschminderung am Hinterachsgetriebe* [3]. Hier liegt im Grunde die gleiche Problemstellung wie in der vorliegenden Arbeit vor; das durch Verzahnungskräfte angeregte Getriebeheulen soll reduziert werden. Als Lösungsansatz wählen die Autoren die aktive strukturelle Entkopplung des Getriebes vom Hinterachsträger mittels elektrodynamisch arbeitender Inertialmasseaktoren an ausgewählten Lagerstellen. Sie erreichen mit diesem Ansatz eine Reduzierung des „Geräuschs im Innenraum“ um 5 dB .

Im Gegensatz dazu wird in dieser Arbeit der Einsatz aktiver Wandlerwerkstoffe zur Schwingungsminderung verfolgt. Dieser hat sich in vielen anderen Gebieten bereits bewährt (vgl. bspw. [4, 5, 6]): Für hochfrequente Anwendungen werden piezoelektrische Keramiken zur aktiven Schwingungsbeeinflussung eingesetzt, da sie große Kräfte über einen breiten Frequenzbereich stellen können. Insbesondere piezoelektrische Stapelaktoren werden hierfür gerne eingesetzt; aufgrund ihres Aufbaus ermöglichen sie meist höhere Kräfte als piezoelektrische Flächenwandler. Gleichzeitig bedingt deren biege-, schub- und zugempfindlicher Aufbau jedoch hohe Anforderungen an die Einbaubedingungen, weshalb Stapelaktoren für den hier angestrebten Einsatz als Add-On-Lösung am Getriebe weniger geeignet sind als piezoelektrische Flächenwandler. Diese können mit wenig Aufwand auf bestehende Strukturen geklebt werden, wenn die Krümmungen in den entsprechenden Bereichen nicht zu groß sind. Die geringeren erreichbaren Kräfte können durch eine verteilte Anordnung mehrerer Aktoren kompensiert werden.

Die Anwendung von piezoelektrischen Flächenwandlern als Aktoren zur Schwingungsbeeinflussung ist in einer Vielzahl an Veröffentlichungen beschrieben. Auffällig hierbei ist, dass es sich bis auf wenige Ausnahmen um Anwendungen auf Balken- oder Plattenstrukturen handelt. Die Schwerpunkte dieser Veröffentlichungen liegen also nicht in konkreten Anwendungsfällen, sondern stellen grundsätzliche Untersuchungen der Funktions- und Wirkungsweise dieser mechanischen Systeme dar. Fast allen ist gemein, dass sie die Eignung der Flächenwandler zur Schwingungsbeeinflussung bestätigen. Der Schwerpunkt der einzelnen Arbeiten liegt dabei beispielsweise auf der Bestimmung der optimalen Positionierung [7, 8], der optimalen Geometrie [9, 10], der Untersuchung verschiedener Einsatzmöglichkeiten dieser Aktoren [11, 12] oder der Untersuchung von typischen Randeffekten [13, 14]. Auch der direkte Vergleich mit passiven strukturbeeinflussenden Maßnahmen wird behandelt [15].

Konkrete Anwendungsfälle, in denen piezoelektrische Flächenwandler zum Einsatz kommen, sind unter anderem in den Veröffentlichungen von Sénéchal et al. [16], Ringwelski et al. [17] und Jakob et al. [18] beschrieben: Sénéchal et al. setzen piezoelektrische Flächenwandler mit passiven elektrischen Schwingkreisen zur Schwingungsdämpfung von Lüfterschaufeln ein. Der Fokus der Arbeit liegt auf der Optimierung der Positionierung und Dimensionierung der Flächenwandler, wofür verschiedene Optimierungsalgorithmen und Finite-Element-Modelle eingesetzt werden. Die Simulationsergebnisse versprechen deutliche Schwingungsreduktionen.

Ringwelski et al. behandeln in [19] die aktive Schwingungsminderung einer Ölwanne mittels piezoelektrischer Flächenwandler. Die Auslegung des Gesamtsystems erfolgt anhand eines Finite-Elemente-Modells und wird anschließend unter Laborbedingungen getestet. Die Ergebnisse zeigen eine deutliche Reduktion der Strukturschwingungen sowohl der Ölwanne allein als auch des montierten Motorgehäuses unter Prüfstandsbedingungen.

Jakob et al. vergleichen in [18] die Wirksamkeit eines semi-aktiven und eines passiven Dämpfungsansatzes mittels Flächenwandlern an einem skalierten Eisenbahnrad zur Schwingungsminderung einer durch das Abrollen des Rades angeregten Eigenform. Auch hier erreichen die Autoren deutliche Schwingungsminderungen, wobei der aktive Ansatz dem semi-aktiven deutlich überlegen ist.

Diese Reihe der Veröffentlichungen wird mit der vorliegenden Arbeit fortgesetzt, wobei die untersuchte Struktur deutlich komplexer ist und die Eigenfrequenzen des Systems wesentlich enger benachbart liegen. Die Entscheidung, das Potential von piezoelektrischen Flächenwandlern speziell am Beispiel des Getriebeheulens zu untersuchen, wird dabei von aktuellen Anfragen aus der Industrie zu eben dieser Thematik bestärkt.

1.3 Lösungsansatz und Struktur der Arbeit

Für die Beurteilung der elektromechanischen Beeinflussbarkeit des Getriebeheulens wird ein systematisches Vorgehen entwickelt, welches auf ähnliche Fragestellungen übertragbar ist: Aufbauend auf der experimentellen Identifikation der dynamischen Systemeigenschaften des Getriebes,

werden mit Hilfe eines daran abgeglichenen Finite-Elemente-Modells geeignete Bereiche für die Positionierung der Flächenwandler bestimmt. Auf diese werden im FE-Modell des Getriebes die Flächenwandler integriert, um ein elektromechanisch gekoppeltes Modell des Gesamtsystems zu erhalten. Das Modell wird reduziert, was den simulativen Vergleich passiver und aktiver Ansätze zur Schwingungsminderung des Getriebeheulens ermöglicht. Basierend auf den erzielten Ergebnissen werden Empfehlungen und Hinweise für eine mögliche praktische Umsetzung dieser Ansätze gegeben.

Die graphische Darstellung des entwickelten Vorgehens in Abb. 1 gibt einen Überblick über das Vorgehen und die Struktur der Arbeit: In Kapitel 2 wird die durchgeführte experimentelle Modalanalyse des Getriebes in einsatznaher Einbausituation an einem Prüfstand behandelt. Bedingt durch die begrenzte Anzahl an Messpunkten genügt die räumliche Auflösung des experimentell erfassten Modells für das weitere Vorgehen nicht. Um ein räumlich hoch aufgelöstes und realitätsnahes Modell zu erhalten, bilden diese Ergebnisse daher die Referenzwerte für den in Kapitel 3 beschriebenen Modellabgleich. Dieser erfolgt ausgehend von einem vom Getriebehersteller zur Verfügung gestellten Finite-Elemente-Modell des Getriebes, mit dem eine numerische Modalanalyse durchgeführt wird. Nach Berücksichtigung der am Prüfstand geltenden Randbedingungen werden mit Hilfe einer Sensitivitätsanalyse relevante Parameter für den Modellabgleich identifiziert. Mit diesen gelingt eine Anpassung des Finite-Elemente-Modells an die experimentell ermittelten Ergebnisse, so dass sich die relevanten Eigenfrequenzen und -formen im FE-Modell gut mit den entsprechenden experimentell ermittelten decken.

Anhand dieses FE-Modells wird in Kapitel 4 die Eigenform identifiziert, welche auf eine Verzahnungsanregung im relevanten Drehzahlbereich besonders sensitiv reagiert und somit für das Phänomen des Getriebeheulens verantwortlich ist (Heul-Eigenform). Eine detaillierte Untersuchung dieser Eigenform dient der Identifikation der für die Aktorpositionierung geeigneten Bereich. Auf diese werden im FE-Modell piezoelektrische Flächenwandler modelliert. Über eine Modellreduktion und die Integration der experimentell ermittelten modalen Dämpfungswerte wird hieraus das elektromechanisch gekoppelte Gesamtmodell erstellt, mit dem passive und aktive Ansätze zur Schwingungsminderung des Getriebeheulens untersucht werden:

Über die Integration der kapazitiv wirkenden Flächenwandler in elektrische Schwingkreise in passiven Multi-Shunt-Systeme wird eine teilweise Tilgung der Heulfrequenz erreicht. Dieser Ansatz wird für eine bewährte monofrequente Auslegungsmethode und eine verbesserte, für verstimmte Multi-Shunt-Systeme neu entwickelte Auslegungsmethode verglichen und hinsichtlich ihrer Eignung für eine praktische Umsetzung bewertet.

Der aktive Ansatz wird durch eine rein theoretische Abschätzung über die optimale Störgrößenaufschaltung eingeleitet. Eine darauf aufbauende, realitätsnahe Simulation des über den FxLMS-Algorithmus beeinflussten Systems ermöglicht die Bewertung dieses Ansatzes hinsichtlich der in einer praktischen Umsetzung zu erwartenden Ergebnisse.

Die mit den verschiedenen Ansätzen erreichbaren Amplitudenreduktionen werden abschließend miteinander verglichen. Hieraus werden Empfehlungen für eine praktische Umsetzung der Schwingungsminderung des Getriebeheulens abgeleitet. Die besten Ergebnisse sind dabei unter Verwendung des FxLMS-Algorithmus zu erwarten.

Im abschließenden Kapitel 5 werden die wesentlichen Punkte der Arbeit zusammengefasst, ein Ausblick auf ein mögliches weiteres Vorgehen gegeben, sowie Ideen für weitere Forschungsthemen auf diesem Gebiet formuliert.

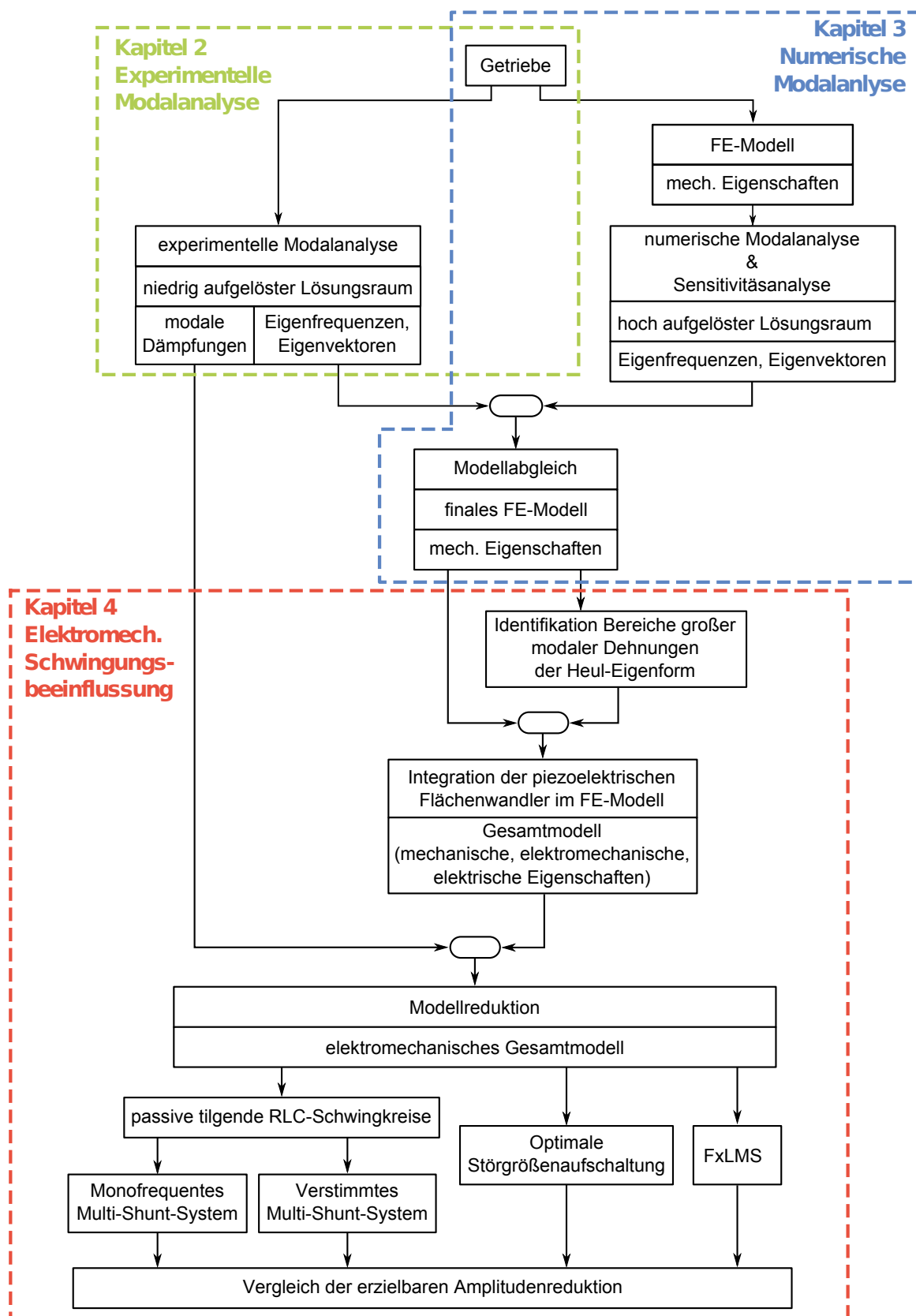


Abbildung 1: Entwickeltes Vorgehen und Struktur der Arbeit.

2 Experimentelle Modalanalyse

Ziel der experimentelle Modalanalyse ist die Identifikation der dynamischen bzw. modalen Eigenschaften einer mechanischen Struktur, hier des Getriebes. Ausgedrückt werden diese über die L konjugiert komplexen Eigenwertpaare λ_l , aus denen die L Eigenkreisfrequenzen des ungedämpften Systems $\omega_{0,l}$ und die zugehörigen modalen Dämpfungen D_l ermittelt werden, sowie die Eigenformen bzw. -vektoren ψ_l . Weiter werden die $2L$ Residuen-Matrizen \mathbf{R}_l und die $2L$ Beteiligungs-Vektoren \mathbf{P}_l hinzugezählt [20]. Insbesondere die Eigenvektoren und -frequenzen, sowie die Dämpfungen sind für den weiteren Verlauf der Arbeit als Referenzwerte relevant.

Im Folgenden werden zunächst die Grundlagen der experimentellen Modalanalyse erläutert. Dies dient dem Verständnis der zugrunde liegenden Algorithmen, womit die Möglichkeiten und Grenzen des Verfahrens verständlich gemacht werden. Erst damit ist eine realistische Interpretation der erreichbaren Ergebnisse möglich. Anschließend wird der Messaufbau sowie die -durchführung beschrieben. Die Messauswertung einschließlich der Diskussion der erzielten Ergebnisse schließen das Kapitel über die experimentelle Modalanalyse ab.

Die ermittelten Ergebnisse erlauben aufgrund der begrenzten Messpositionen lediglich eine für das weitere Vorgehen unzureichende räumlich aufgelöste Abbildung der Getriebeeigenformen. Systembedingt können nur auf der Getriebeaußenseite Messdaten erfasst werden, die Verformungen der innenliegenden Wellen und Zahnräder sind messtechnisch nicht zugänglich. Die resultierenden Eigenfrequenzen und -vektoren werden daher als Referenz für die in Kapitel 3.5 beschriebene Modellanpassung des Finite-Elemente-Modells verwendet. Die ermittelten modalen Dämpfungsgrade werden in das für die Simulationen verwendete elektromechanisch gekoppelte Gesamtsystem integriert.

2.1 Grundlagen

Die Basis der experimentellen Modalanalyse bilden die von der Kreisfrequenz ω abhängigen Übertragungsfunktionen $H_{nm}(\omega)$ der zu untersuchenden Struktur. Diese werden aus von der Zeit t abhängigen (Kraft-) Anregungssignalen $f_m(t)$ und zugehörigen (Beschleunigungs-) Antwortsignalen $a_n(t)$ beispielsweise mittels des $H_1(\omega)$ -Verfahrens (vgl. Gl. (1)) geschätzt [21]. Die hier angeführten Gleichungen gelten für die experimentell zu J Messzeitpunkten ermittelten diskreten Zeitsignale. Die Indizes m und n geben die maximal M Anregungs- bzw. N Antwort-Freiheitsgrade an:

$$H_{nm}(j\Delta\omega) = \frac{\hat{S}_{fa}(j\Delta\omega)}{\hat{S}_{ff}(j\Delta\omega)}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, \left(\frac{J}{2} - 1\right). \quad (1)$$

Hierin ist $\hat{S}_{fa}(j\Delta\omega)$ die über K Messungen gemittelte Kreuzleistungsdichte der entsprechenden Kraft- und Beschleunigungs-Signale an der jeweiligen j . diskreten Frequenzstützstelle ($j\Delta\omega$). Im

weiteren Verlauf der Arbeit wird die diskrete Frequenzstützstelle ($j\Delta\omega$) zugunsten der besseren Lesbarkeit als ω_j bezeichnet.

$$\hat{S}_{fa}(\omega_j) = \frac{2}{KJ\Delta t} \sum_{k=1}^K F_{m,k}^*(\omega_j) A_{n,k}(\omega_j) \quad (2)$$

$\hat{S}_{ff}(\omega_j)$ ist die über K Messungen gemittelte Autoleistungsdichte des entsprechenden Kraft-Signals:

$$\hat{S}_{ff}(\omega_j) = \frac{2}{KJ\Delta t} \sum_{k=1}^K |F_{m,k}(\omega_j)|^2. \quad (3)$$

In Gl. (2) und (3) sind $F_{m,k}(\omega_j)$ und $A_{n,k}(\omega_j)$ die Diskreten Fourier Transformaten von $f_{m,k}(j\Delta t)$ bzw. $a_{n,k}(j\Delta t)$ (vgl. Anhang Gl. (73)).

Mit den geschätzten Übertragungsfunktionen ist die Beschreibung des dynamischen Systems durch die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{H}(\omega_j)$, auch Frequenzgangmatrix genannt, möglich. Sie hat die Dimension $N \times M$. Die einzelnen Einträge geben dabei das Übertragungsverhalten von der Anregung an einer Position m zur Antwort an einer Position n wieder. Nach [22] gilt aufgrund der Reziprozität linearer Systeme $H_{nm} = H_{mn}$. Dies ermöglicht bei Durchführung der Modalanalyse das gegenseitige Auswechseln von Anregungs- und Antwortposition.

Die Frequenzgangmatrix $\mathbf{H}(\omega_j)$ mit den nach Gl. (1) geschätzten Einträgen kann nach [20] durch eine parametrische Beschreibung ausgedrückt werden. Sämtliche Übertragungsfunktionen $\mathbf{H}(\omega_j)$ werden dabei durch die jeweils konjugiert komplexen Residuen-Matrizen \mathbf{R}_l und Eigenwerte λ_l dargestellt:

$$\mathbf{H}(\omega_j) = \sum_{l=1}^L \frac{\mathbf{R}_l}{i\omega_j - \lambda_l} + \sum_{l=1}^L \frac{\mathbf{R}_l^*}{i\omega_j - \lambda_l^*}. \quad (4)$$

Die Eigenwerte λ_l enthalten die Informationen über die Eigenkreisfrequenzen ω_0 und die zugehörigen modalen Dämpfungen D_l :

$$\lambda_l = -D_l \omega_{0,l} \pm i \omega_{0,l} \sqrt{1 - D_l^2}. \quad (5)$$

Die Residuen-Matrizen \mathbf{R}_l enthalten die Informationen über die Eigenvektoren $\boldsymbol{\psi}_l$ und können nach [20] dargestellt werden als

$$\mathbf{R}_l = \frac{\boldsymbol{\psi}_{lN} \boldsymbol{\psi}_{lM}^T}{a_l}. \quad (6)$$

Die Vektoren ψ_{lM} und ψ_{lN} entsprechen den Teilen der Eigenvektoren, die den M Anregungs- und N Antwort-Freiheitsgraden der l . Mode zugeordnet sind. Der Nenner a_l entspricht einem modalen Skalierungsfaktor, der unter anderem von der Art der gemessenen Ausgangsgröße, also Auslenkung, Geschwindigkeit oder Beschleunigung, abhängt [20]. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass wegen der konjugiert komplex auftretenden Parameter

$$\mathbf{R}_l = \mathbf{R}_{l+1}^* \quad \text{und} \quad \lambda_l = \lambda_{l+1}^* \quad \text{für } l = 1, 3, 5, \dots \quad (7)$$

gilt, kann Gl. (4) zusammengefasst werden zu

$$\mathbf{H}(\omega_j) = \sum_{l=1}^{2L} \frac{\mathbf{R}_l}{i\omega_j - \lambda_l}. \quad (8)$$

Anstelle der Summation über die $2L$ Residuen-Matrizen können die Beteiligungs-Matrix \mathbf{P} und die Eigenvektor-Matrix Ψ verwendet werden. Damit kann Gl. (8) durch eine Matrixdarstellung ersetzt werden [20]. Die Verwendung von $\begin{bmatrix} \cdot \end{bmatrix}$ symbolisiert eine Diagonalmatrix:

$$\mathbf{H}(\omega_j) = \Psi \begin{bmatrix} \frac{1}{i\omega_j - \lambda_l} \end{bmatrix} \mathbf{P}^T. \quad (9)$$

Mit dieser Gleichung wird die vollständige Systembeschreibung unter Verwendung der modalen Parameter erreicht. Ein Ziel der experimentellen Modalanalyse ist daher die Lösung der Gleichung (9). Diese ist nichtlinear hinsichtlich der zu identifizierenden Parameter. Daher werden zunächst über einen Zwischenschritt nur die Eigenwerte λ_l und die Beteiligungs-Matrix \mathbf{P} ermittelt. Hierzu werden die einzelnen gemessenen Übertragungsfunktionen über das Polynom

$$H_{nm}(\omega_j) = \frac{A_n(\omega_j)}{F_m(\omega_j)} = \frac{\sum_{k=0}^q \beta_k (i\omega_j)^k}{\sum_{k=0}^p \alpha_k (i\omega_j)^k} \quad (10)$$

dargestellt. Bei Berücksichtigung aller geschätzten Frequenzgänge in der Frequenzgangmatrix ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^p (\alpha_k (i\omega_j)^k) \mathbf{H}(\omega_j) = \sum_{k=0}^q (\beta_k (i\omega_j)^k) \mathbf{I}. \quad (11)$$

Diese Gleichung ist linear hinsichtlich der unbekannten Koeffizienten-Matrizen α und β , womit diese bestimmt werden können. Die Matrizen α werden anschließend verwendet, um die charakteristische (Matrix-) Gleichung aufzustellen:

$$|\alpha_p(i\omega_j)^p + \alpha_{p-1}(i\omega_j)^{p-1} + \dots + \alpha_0| = 0. \quad (12)$$

Die Nullstellen dieser Gleichung sind gleichbedeutend mit den gesuchten Polstellen des untersuchten Systems. Sie lassen sich beispielsweise über ihre Begleitmatrix bestimmen. Die zugehörigen Eigenvektoren dieser Begleitmatrix beinhalten auch die Beteiligungsmatrix \mathbf{P} , die zur Lösung der Gl. (9) benötigt wird. Details zu dieser Lösungs-Methode sind für das weitere Vorgehen nicht erforderlich und in [20, 23, 24] zu finden.

Die Anzahl der Polynom-Nullstellen ergibt sich aus dem Produkt der gewählten Nennerordnung p in Gl. (10) und der Größe der quadratischen Koeffizientenmatrizen α . Die Größe der Koeffizientenmatrix wird dabei durch die Anzahl der Antwort-Freiheitsgrade N bestimmt. Die Nennerordnung p ist abhängig vom verwendeten Parameterschätz-Algorithmus. Die so ermittelte Anzahl an Polstellen entspricht also nicht der physikalisch begründbaren Anzahl. Da somit nicht automatisch die richtige Anzahl an Polstellen identifiziert wird, kommt der fundierten Vorhersage der tatsächlichen Modellordnung eine große Bedeutung zu. Erst wenn diese bekannt ist, können mit verschiedenen Parameterschätzverfahren (vgl. Kapitel 2.3) sinnvolle Ergebnisse erzielt werden. Im Folgenden wird auf verschiedene Methoden eingegangen, die der begründeten Ordnungswahl dienen.

2.2 Bestimmung der Modellordnung

Wird die tatsächliche Ordnung unterschätzt, fehlen im geschätzten Modell evtl. wichtige Eigenschaften. Wird eine zu hohe Ordnung zu Grunde gelegt, führen durch numerische Fehler bedingte Parameter zu physikalisch nicht sinnvollen Ergebnissen [25]. Allemang gibt in [20] die passende Vorhersage der Ordnung des zu schätzenden Modells daher sogar als das „single most important problem“ an. Es gibt keine Methode, welche die exakte Anzahl an Eigenfrequenzen innerhalb eines bestimmten Bereichs anhand von gemessenen Frequenzgängen identifiziert. Allerdings gibt es einige Methoden, mit denen eine näherungsweise Vorhersage möglich ist. Die einfachste Methode ist das Zählen der visuell erfassbaren Resonanzstellen in den gemessenen Frequenzgängen. Eine weitere einfache Methode ist die Summation der quadrierten Frequenzgänge

$$H_{power}(\omega_j) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M H_{nm}(\omega_j) H_{nm}^*(\omega_j), \quad (13)$$

woraus die Anzahl der Eigenfrequenzen ebenfalls visuell bestimmt wird. Beiden Methoden versagen, wenn einzelne Mess-Freiheitsgrade mit Knotenpunkten einzelner Moden zusammenfallen

oder wiederholte oder sehr nah beieinander liegende Eigenfrequenzen auftreten. Eine etablierte Methode zur Identifikation von Eigenfrequenzen auch unter diesen Bedingungen stellt die *Multivariate Mode Indicator Function* (MMIF) dar. Sie wird direkt aus den gemessenen Frequenzgängen ermittelt und besitzt an allen Resonanzstellen Minima. Bildet eine Frequenzgangmatrix die Datengrundlage, kann für jede Zeile (also jeden Sensor) eine *Mode Indicator Function* (MIF) ermittelt werden. Die Primäre MIF weist Minima an allen Resonanzstellen auf, die Sekundäre MIF nur an Stellen wiederholter oder nah beieinander liegender Resonanzen. Die Tertiäre oder höherwertige MIF besitzen Minima nur an Stellen, wo mindestens drei oder entsprechend mehr Resonanzen liegen. Details zu dieser Methode finden sich in [26].

Weitere Methoden, welche der Ordnungs-Identifikation dienen, sind beispielsweise das Fehler-Diagramm, das Stabilitäts-Diagramm oder der *Pole Surface Density Plot* [27]. In der im Rahmen dieser Arbeit bei der experimentellen Modalanalyse verwendeten Software *Test for Ideas* [28] sind das Fehler- und das Stabilitäts-Diagramm implementiert. Das Fehlerdiagramm gibt in Abhängigkeit der Modellordnung die Abweichung der nach Gl. (10) approximierten Frequenzgänge von den gemessenen an. Ändert sich dieser Fehler ab einer bestimmten Ordnung signifikant weniger als bis zu dieser Ordnung, wird die nächst kleinere Ordnung als ausreichend angesetzt.

Das Stabilitäts-Diagramm kommt standardmäßig zur Verwendung. Hierbei werden für iterativ steigende Ordnungszahlen die Eigenfrequenzen, Dämpfungswerte und Beteiligungsvektoren mit einem beliebigen Parameterschätzverfahren (vgl. Kapitel 2.3) geschätzt. Weitere Parameter werden in diesem Schritt nicht ermittelt. Ändern sich die ermittelten Parameter mit steigender Modellordnung nur noch in einem begrenztem Bereich, werden sie als stabil bezeichnet. Numerisch bedingte Parametersätze stabilisieren sich in der Regel nicht und können mit Hilfe dieser Methode erkannt werden.

Ist die Ordnung des zu schätzenden Modells durch eine dieser Methoden näherungsweise bestimmt, kommen Parameterschätzverfahren zum Einsatz, um Gl. (9) zu lösen. In den letzten Jahrzehnten wurde eine Vielzahl an Verfahren hierfür entwickelt. Im Folgenden werden die grundlegenden Algorithmen, die auch in der verwendeten Software implementiert sind, hinsichtlich ihrer Eigenschaften und Anwendbarkeit erläutert.

2.3 Parameterschätzverfahren

Parameterschätzverfahren lassen sich grundsätzlich durch zwei wesentliche Merkmale unterscheiden: Zum einen, ob es sich um Einfreiheitsgrad- oder Mehrfreiheitsgrad-Verfahren handelt, zum anderen, ob sie im Zeit- oder im Frequenzbereich angesiedelt sind. Frequenzbereichsverfahren werten in der Regel Frequenzgänge aus. Zeitbereichsverfahren basieren auf einer Rücktransformation der Frequenzgänge und werten die resultierenden Impulsantwort-Funktionen aus.

2.3.1 Einfreiheitsgrad-Verfahren

Die Einfreiheitsgrad-Schätzverfahren basieren auf der Annahme, dass alle auftretenden Moden voneinander entkoppelt sind, der gegenseitige Einfluss also sehr gering ist. Erfüllt die untersuchte Struktur diese Anforderung, lassen sich mit diesen Verfahren mit geringem Aufwand gute Ergebnisse erzielen. Gebräuchliche Varianten dieser Methode sind beispielsweise das *Peak Amplitude* - oder das *Circle Fit Verfahren*. Details zu diesen, wie auch weiteren Verfahren, finden sich beispielsweise in [29, 30]. Hier werden sie nicht weiter erläutert, da das in dieser Arbeit untersuchte Getriebe die Anforderungen nach entkoppelten Moden nicht erfüllt und diese Verfahren im vorliegenden Fall daher nicht zur Anwendung kommen.

2.3.2 Mehrfreiheitsgrad-Verfahren

Im Gegensatz zu Einfreiheitsgrad-Verfahren berücksichtigen Mehrfreiheitsgrad-Verfahren mehrere Moden simultan. Damit ist auch die Identifikation von doppelten oder sehr eng benachbarten Eigenfrequenzen möglich. Doppelte Eigenfrequenzen besitzen bei identischen Frequenzwerten verschiedene Eigenformen. In *Test for I-deas* sind vier Mehrfreiheitsgrad-Verfahren implementiert:

Das *Complex-Exponential*-Verfahren ist ein Zeitbereichs-Verfahren, das als Datenbasis nur einen einzelnen Frequenzgang verwendet. Selbst bei Verwendung einer *Driving-Point*-Messung (Anregungs- und Antwort-Freiheitsgrad sind koinzident), die in der Regel von sehr hoher Qualität ist, bildet dies jedoch keine ausreichende Datengrundlage für ein so komplexes System wie das analysierte Getriebe. In der *Test for I-deas* Dokumentation [31] wird diese Variante für einfache Strukturen mit gut angeregten Eigenformen empfohlen. Da das Getriebe diese Bedingungen nicht erfüllt, wird dieses Verfahren nicht weiter erläutert, sondern auf die Literatur (bspw. [32]) verwiesen.

Das *Direct-Parameter*-Verfahren ist ein Frequenzbereichs-Verfahren, welches auf Basis mehrerer Frequenzgänge eines Referenz-Freiheitsgrades mittels der Methode der kleinsten Quadrate die gewünschten Modalparameter schätzt. Mit dieser Methode werden für das untersuchte Getriebe jedoch keine sinnvollen Ergebnisse erzielt. Ursächlich ist vermutlich die schwache Kopplung zwischen horizontaler und vertikaler Richtung (vgl. Kapitel 2.6.1). Aus diesem Grund wird auf die nähere Ausführung des Verfahrens verzichtet. Detaillierte Beschreibungen finden sich in [31, 33].

Ebenfalls im Frequenzbereich wird das *Orthogonal-Polyreference*-Verfahren eingesetzt. Hierbei handelt es sich um ein Verfahren hoher Ordnung, welches in [20] aufgrund der schlechten numerischen Eigenschaften als generell schwierig zu beherrschen beschrieben wird. Die mit diesem Verfahren erzielten unbefriedigenden Ergebnisse bestätigen diese These.

Das *Polyreference*-Verfahren ist ein Zeitbereichs-Verfahren, das ebenso wie das *Frequency-Polyreference*-Verfahren, welches das Pendant im Frequenzbereich darstellt, sehr häufig Ver-

wendung in aktueller Software findet [25]. Beide Verfahren schätzen auf Grundlage mehrerer Frequenzgänge verschiedener Referenz-Freiheitsgrade (also mehrerer Zeilen bzw. Spalten der Frequenzgang-Matrix) die Parameter. Ein diesen Verfahren sehr ähnliches kommerziell genutztes Verfahren ist unter dem Namen PolyMAX [34] bekannt. Es unterscheidet sich im Wesentlichen dadurch, dass es im Bildbereich angesiedelt ist, wodurch die numerischen Eigenschaften weiter verbessert werden.

Der relevante Vorteil des Frequenzbereich-Verfahrens gegenüber dem Zeitbereich-Verfahren liegt in der Möglichkeit, direkt den Einfluss von Moden außerhalb des betrachteten Frequenzbereichs zu berücksichtigen. Dies geschieht über die Verwendung von *Residual Inertia* und *Resistance*. Mit Hilfe der *Residual Inertia* werden die Trägheitseffekte von Moden oberhalb des betrachteten Frequenzbereichs berücksichtigt, mit *Residual Resistance* die Nachgiebigkeitseffekte von Moden unterhalb des betrachteten Frequenzbereichs. Das *Frequency-Polyreference*-Verfahren ist somit das vielversprechendste Verfahren für die Auswertung der Messungen am betrachteten Getriebe. Die Grundlagen werden im Folgenden erläutert.

2.3.3 Frequency Polyreference Verfahren

Die Grundgleichung für diesen Algorithmus entspricht Gl. (11) mit $p = 2$ und $q = 1$, was in Matrix-Schreibweise in Gl. (14) dargestellt ist:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \beta_0 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\omega_j) \\ (i\omega_j)\mathbf{H}(\omega_j) \\ -\mathbf{I} \\ -(i\omega_j)\mathbf{I} \end{bmatrix} = -(i\omega_j)^2 \mathbf{H}(\omega_j). \quad (14)$$

Die Koeffizientenmatrix α_2 ist dabei auf die Einheitsmatrix normiert. Wird dieses Gleichungssystem an nur einer Frequenzstützstelle formuliert, übersteigt die Zahl der Unbekannten die Anzahl der Gleichungen deutlich. Daher wird Gl. (14) für entsprechend viele Frequenzstützstellen aufgestellt. Werden alle Frequenzstützstellen des interessierenden Frequenzbereichs berücksichtigt, resultiert ein meist überbestimmtes Gleichungssystem, woraus die unbekannten Koeffizienten-Matrizen α_0 , α_1 , β_0 und β_1 ermittelt werden. Ein Verfahren zur Lösung dieses Gleichungssystems ist beispielsweise in [35] beschrieben.

Sind alle Koeffizienten-Matrizen bestimmt, wird damit die Begleitmatrix des Nennerpolynoms (vgl. Gl. (12)) gebildet. Die Eigenwerte dieser Matrix entsprechen den Wurzeln des Polynoms und beinhalten bei geeignet gewählter Modellordnung damit auch die L Eigenwerte λ_l des untersuchten Systems. Aus den Eigenvektoren der Begleitmatrix wird beim *Frequency-Polyreference*-Verfahren die Beteiligungsmatrix \mathbf{P} extrahiert [33]. Somit sind die zur Linearisie-

2.4 Versuchsaufbau und Messausrüstung

Getriebe

to21

ba1

fr12

bo3

Gleichlaufgelenkwelle

w3

w4

Momentenmesswelle

Antriebsseitige Einspannung

Anschlussbox Datenerfassung

Abtriebsseitige Lastmaschine

Beschleunigungsaufnehmer (ausgewertet)

□ sichtbar

○ verdeckt

Die für die Modalanalyse benötigten Messungen werden mit Hilfe der folgenden Ausrüstung durchgeführt:

-
- 14

-
- 6 B&K Beschleunigungssensoren Typ 4396

Vor Beginn der Messungen werden folgende softwareseitigen Einstellungen vorgenommen:

- Abtastung:
 - Abtastfrequenz: 10240 Hz
 - Frequenzauflösung Δf : 1,25 Hz
 - Messintervall: 0,8 s $\hat{=}$ 8192 Messpunkten
 - Frequenzbereich: 0-4000 Hz
- Triggering: Pretrigger auf Hammersignal
- Fensterung: keine
- Sensor-Daten: entsprechend Datenblatt
- Hammer-Daten: entsprechend Datenblatt

Mit diesen Einstellungen ist es möglich, den für die Untersuchungen relevanten Frequenzbereich bis ca. 800 Hz mit einer ausreichend hohen Frequenzauflösung zu analysieren.

Vor jeder Messung werden die Eingangsspannungsbereiche des A/D-Wandlers für jeden einzelnen Messkanal kalibriert. Der Fokus liegt hierbei auf einem möglichst guten Verhältnis von Nutz- zu Störsignal, weshalb eine hohe Ausnutzung des jeweiligen Eingangsspannungsbereichs angestrebt wird. Für die Beschleunigungssensoren bedeutet dies: unterschreitet die aus der Beschleunigungsamplitude resultierende Eingangsspannung die 20%-Marke der oberen Grenze des Eingangsspannungsbereichs, wird die Messung verworfen, da dann das minimal geforderte Verhältnis von Nutz- zu Störsignal und somit die minimal geforderte Messqualität nicht erreicht wird.

Bei der Verwendung mehrerer Sensoren kann dieser Prozess recht aufwändig werden, was Anhand eines einfachen Beispiels erläutert wird. Betrachtet wird hierfür die zweite Biege-Eigenform eines gelenkig gelagerten Balkens (vgl. Abb. 3).

Je ein Beschleunigungssensor ist in der Nähe eines Schwingungsbauches (Sensorposition 1) bzw. eines Knotens (Sensorposition 2) positioniert. Für Sensorposition 1 können verschiedene Beschleunigungen, bedingt durch unterschiedlich starke Anregungen, über mehrere Eingangsspannungsbereiche erfasst werden; die Amplituden A_1 bis A_3 liegen dabei innerhalb der möglichen Eingangsspannungsbereiche, wobei A_3 hier das beste Verhältnis von Nutz- zu Störsignal verspricht. Für Sensorposition 2 hingegen liegen die Amplituden A_2 bis A_4 innerhalb der möglichen Eingangsspannungsbereiche, wobei A_4 das beste Verhältnis von Nutz- zu Störsignal verspricht. Die Amplitude A_1 erreicht nicht die minimal geforderte Signalstärke. Für dieses Beispiel führen also nur die Amplituden A_2 und A_3 zu verwertbaren Messergebnissen, und das nur bei passender Einstellung der Eingangsspannungsbereiche der A/D-Wandler. Durch die Verwendung

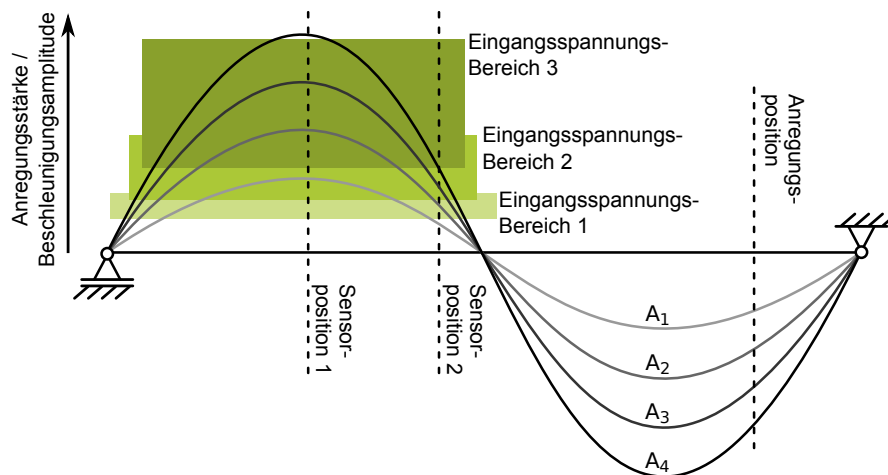


Abbildung 3: Skizze zur Erläuterung ungünstiger Messbereichsausnutzung aufgrund verschiedener Anregungsstärken und resultierender Auslenkungen der zweiten Biege-Eigenform eines einfach gelagerten Balkens.

von 6 Beschleunigungssensoren bei der Vermessung des Getriebes erhöht sich entsprechend der Aufwand passende Einstellung zu erreichen.

2.5 Messdurchführung

Mit den so für jede Anregungsstelle angepassten Einstellungen wird mit dem Impulshammer auf dem Gehäuse an 140 gleichmäßig verteilten Positionen senkrecht zur Oberfläche sowie auf der Welle an vier axialen Positionen jeweils horizontal und vertikal angeregt. Diese Positionen entsprechen den 148 Anregungs-Freiheitsgraden. Es wird erwartet, dass die im interessierenden Frequenzbereich identifizierbaren Eigenformen keine stark lokale Ausprägung haben. Die Auflösung des Messnetzes wird daher als ausreichend erachtet [36]. Die Messpunkte sind entsprechend ihrer Position benannt. Insgesamt werden die fünf Bereiche *top (to)*, *bottom (bo)*, *front (fr)*, *back (ba)* und *welle (w)* unterschieden. Die Nummerierung erfolgt aufsteigend vom Getriebeausgang in Richtung Antriebsmaschine bzw. für die Positionen auf der Gleichlaufgelenkwelle in Richtung der Lastmaschine. Für die Anregungspunkte, an denen die Sensoren fixiert sind, wird in unmittelbarer Nähe zu diesen angeregt, um näherungsweise die *Driving-Point-Frequenzgänge* zu erhalten. Für jeden Anregungspunkt wird über drei Messungen gemittelt. Damit werden geringe Messunsicherheiten ausgeglichen, gleichzeitig bleibt der Messaufwand tolerabel.

Mit der verwendeten Hammerspitze wird das in Abb. 4 gezeigte Anregungsspektrum erzielt. Bis zur oberen Grenze des interessierenden Frequenzbereichs (50-800 Hz) erfolgt ein Abfall von weniger als 5 dB. Der Messbereich der Sensoren ist im Datenblatt von 1 Hz bis 14 kHz angegeben. Somit kann im gesamten interessierenden Frequenzbereich von einer ausreichenden Anregungssignalstärke ausgegangen werden.

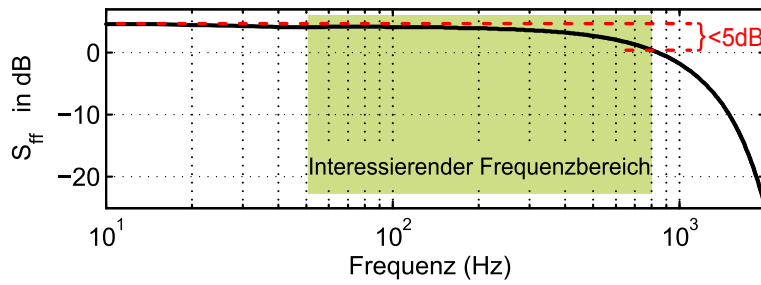


Abbildung 4: Autoleistungsspektrum des Anregungssignals

Die sechs Beschleunigungssensoren werden mit Wachs auf festen Positionen angebracht. Zwei sind auf der Gleichlaufgelenkwelle appliziert, jeweils einer in global vertikaler und global horizontaler Richtung. Von den vier übrigen befindet sich jeweils einer auf einer der vier Hauptseiten des Getriebegehäuses (*top*, *bottom*, *back*, *front*). Sie sind senkrecht zur Gehäuseoberfläche angebracht und so angeordnet, dass sie vorrangig ebenfalls in global vertikaler (dies gilt für die Sensoren auf der Ober- und Unterseite) bzw. horizontaler (dies gilt für die Vorder- und Rückseite) Richtung messen. In Abb. 2 sind die Positionen der Sensoren und die entsprechende Benennung der Antwort-Freiheitsgrade dargestellt.

2.6 Messauswertung und -ergebnisse

Insgesamt ergeben sich aus den verwendeten Antwort-Freiheitsgraden 888 Anregung/Antwort-Kombinationen, die die Basis für die weitere Auswertung bilden. Im folgenden werden zunächst verschiedene Frequenzgänge gezeigt und anhand derer die Messqualität sowie wesentlichen Systemeigenschaften diskutiert. Damit wird die Grundlage für die anschließende Bestimmung der Modellordnung und der Parameterschätzung geschaffen.

2.6.1 Messqualität

Zur Bewertung der Messqualität werden die Kohärenz, reziproke Messungen, *Driving-Point*-Messungen und Amplituden- und Phasenverläufe herangezogen. Die Kohärenz

$$\hat{\gamma}^2(\omega_j) = \frac{|\hat{S}_{fa}(\omega_j)|^2}{\hat{S}_{ff}(\omega_j) \hat{S}_{aa}(\omega_j)} \quad (15)$$

wird häufig als Beurteilungsmaß der Messqualität verwendet [25]. Grundlage ist die Tatsache, dass bei verrauschtem Ein- oder Ausgangssignal die Kohärenz vom Idealwert 1 abweicht. Ebenso können andere unberücksichtigte Eingangssignale das Ausgangssignal beeinflussen und somit zu einer niedrigeren Kohärenz führen. Bei diesen Gründen ist eine von 1 abweichende Kohärenz gleichzusetzen mit verfälschten Messergebnissen und damit einer Abnahme der Messqualität. Jedoch führen beispielsweise auch Nichtlinearitäten im System zu einem geringeren Kohärenz-

wert, was nicht zwangsläufig mit einer geringeren Messqualität gleichzusetzen ist. Trotz dieser Einschränkung wird auch hier die Kohärenz zur Beurteilung der Messqualität herangezogen.

In Abb. 5 sind die Kohärenzen einiger direkter Messungen, also mit Anregung und Ausgangsmessung in global gleicher Richtung, gezeigt. Einige Funktionen weisen in schmalen Frequenzbereichen Einbrüche auf. Je näher die Anregungspositionen an der Antriebsmaschine liegen, desto geringer sind die Kohärenzwerte generell, da der versteifende Einfluss der Antriebsmaschine immer mehr an Einfluss gewinnt und es somit schwieriger wird, Energie in das System einzuleiten. Global betrachtet weisen jedoch die meisten Kohärenzfunktionen akzeptable Werte auf.

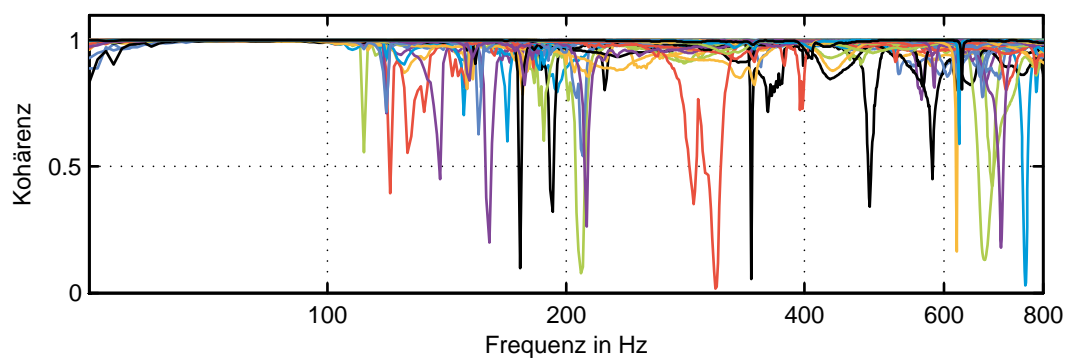


Abbildung 5: Kohärenzfunktionen aller direkten Frequenzgänge des Sensors *ba1*.

Die Kohärenzfunktionen einiger Kreuz-Messungen, also mit Anregung und Ausgangsmessung in näherungsweise orthogonaler Richtung, weisen hingegen über einen weiten Frequenzbereich weniger gute Werte auf (vgl. Abb. 6). Die Ursache hierfür wird in der größtenteils schwachen Kopplung zwischen horizontaler und vertikaler Richtung vermutet. Anregungen in vertikaler Richtung führen also nur zu sehr geringen Auswirkungen in horizontaler Richtung und umgekehrt. Dies führt zwangsläufig zu einem größeren Einfluss des Rauschens auf das Ausgangssignal und somit zu niedrigeren Kohärenzwerten.

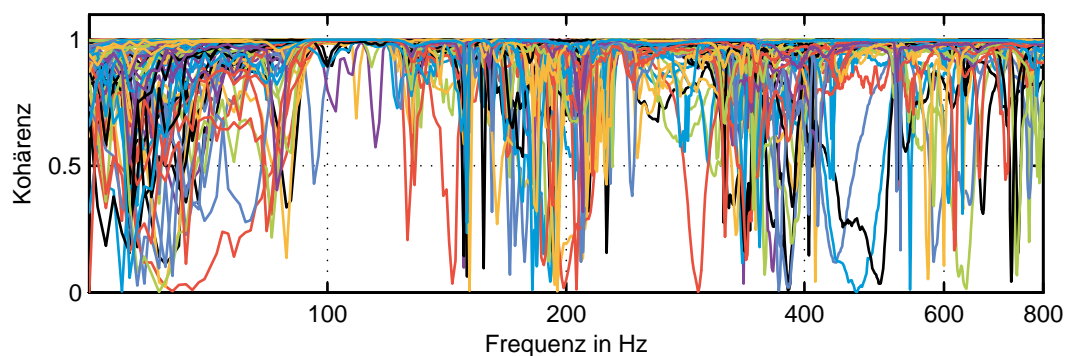


Abbildung 6: Kohärenzfunktionen der Kreuz-Frequenzgänge des Sensors *ba1*.

Wird die Messqualität isoliert mittels der Kohärenz beurteilt, sind die meisten direkten Messungen im interessierenden Frequenzbereich als gut zu beurteilen. Die Kreuz-Messungen hingegen sind von niedrigerer Qualität.

Im vorigen Abschnitt sind Nichtlinearitäten als mögliche Ursache für geringe Kohärenzwerte genannt. Ob es sich hierbei tatsächlich um Nichtlinearitäten handelt klärt der Vergleich reziproker Messungen in den Abb. 7 und 8. Es sind je zwei reziproke Frequenzgänge dargestellt.

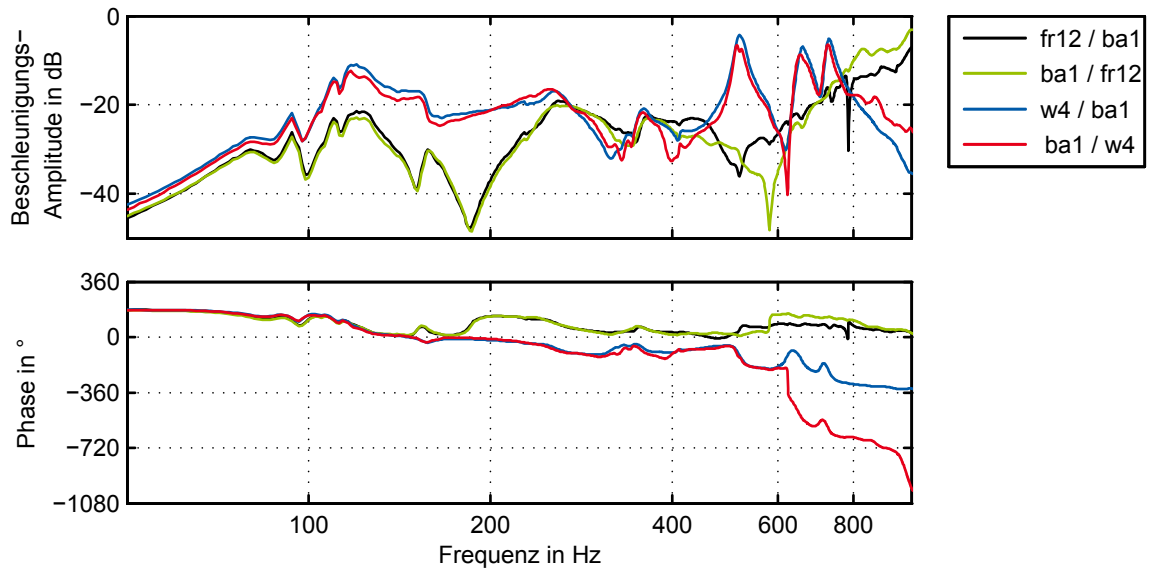


Abbildung 7: Reziproke direkte Frequenzgänge mit hoher Übereinstimmung.

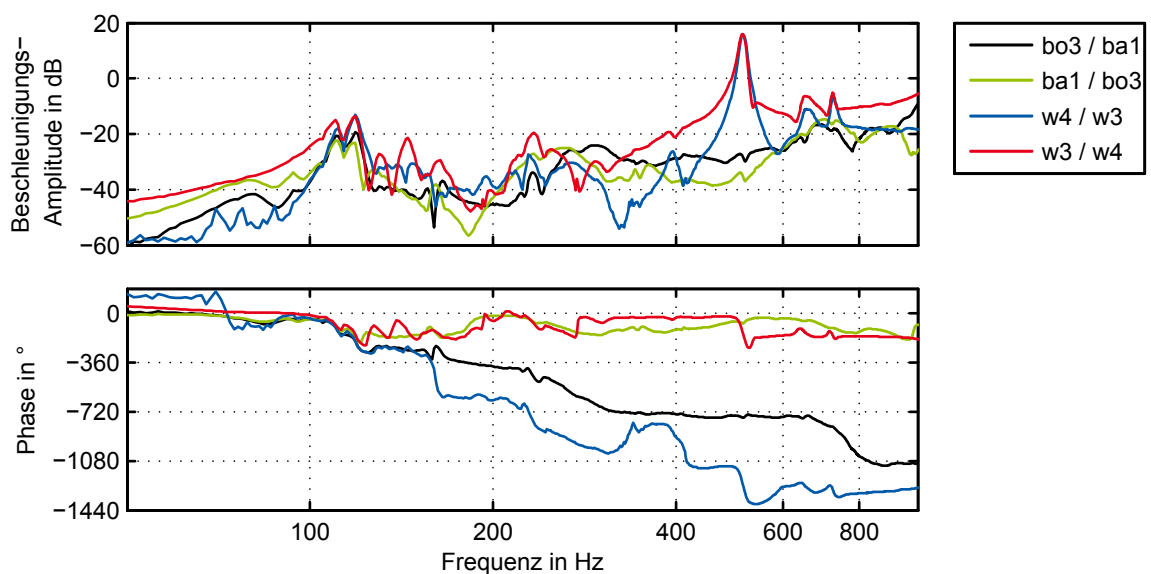


Abbildung 8: Reziproke Kreuz-Frequenzgänge mit geringer Übereinstimmung.

Bei linearen Systemen sind reziproke Frequenzgänge theoretisch identisch. Die in Abb. 7 dargestellten sind dies näherungsweise, wobei die Abweichungen mit steigender Frequenz zunehmen. Die zu diesen Messungen gehörige Kohärenz weist über den gesamten Frequenzbereich sehr gute Werte auf. Die Ursache für die gezeigten Abweichungen liegen demnach weder in Nichtlinearitäten noch in geringer Messqualität. Statt dessen lassen sich die Abweichungen durch die messtechnischen Randbedingungen erklären. So ist es beispielsweise nicht möglich, exakt an der Sensorposition anzuregen. Durch die fest positionierten Sensoren ist nur eine Anregung an nahezu der selben Position möglich. Des weiteren unterliegt die Anregungsrichtung aufgrund der manuellen Anregung leichten Schwankungen. In Abb. 8 sind reziproke Kreuz-Frequenzgänge dargestellt. Hier führt hauptsächlich die mit der Kreuz-Messung einhergehende geringere Messqualität zu den signifikanten Unterschieden.

Als dritter Punkt zur Bewertung der Messqualität werden die sechs ermittelten *Driving-Point*-Messungen in Abb. 9 herangezogen. Diese werden in [31] als die Messungen mit der üblicherweise höchsten Qualität angegeben.

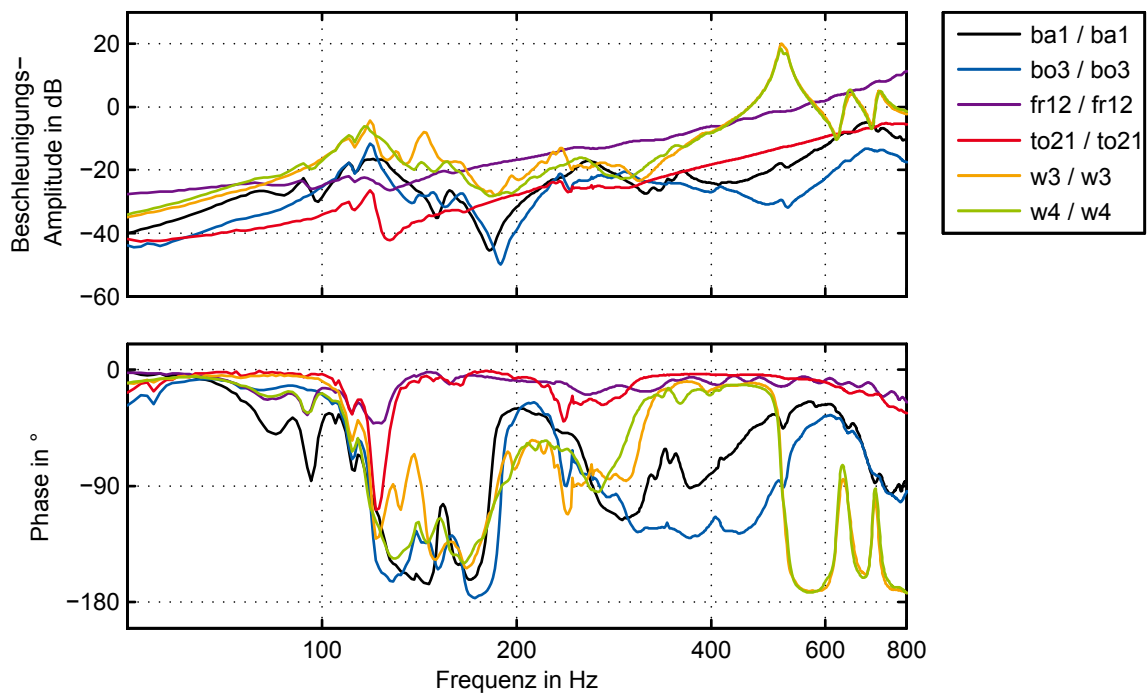


Abbildung 9: *Driving-Point*-Frequenzgänge der Wellen- und Gehäusemessungen. Deutlich korrelierte Amplituden- und Phasengänge bei Messungen auf der Welle ($w3/w3$, $w4/w4$) und zweier Messungen auf dem Gehäuse ($ba1/ba1$, $bo3/bo3$). Geringe Qualität der Messungen $fr12/fr12$ und $to21/to21$ auf dem Gehäuse.

Die Messungen auf der Welle ($w3/w3$, $w4/w4$) sowie eine horizontale ($ba1/ba1$) und eine vertikale ($bo3/bo3$) Gehäusemessung weisen im Amplitudengang sehr deutliche Pol- und

Nullstellen auf. Der Phasengang korreliert damit sehr gut: Polstellen gehen mit Phasenabfällen einher, Nullstellen mit Phasenanstiegen. In den beiden übrigen Gehäusemessungen ($fr12/fr12$, $to21/to21$) sind hingegen kaum Pol- oder Nullstellen zu erkennen. Der Amplitudengang steigt nahezu über den gesamten Frequenzbereich stetig an, der Phasengang weist ebenso kaum Merkmale von Pol- oder Nullstellen auf. Da dieses Aussehen unabhängig von den Anregungspositionen für alle Messungen dieser beiden Sensoren charakteristisch ist (vgl. auch folgender Abschnitt), wird auf sehr geringe Qualität dieser Messungen geschlossen.

Abschließend werden in diesem Kapitel ausgewählte Frequenzgänge dargestellt und diskutiert. In Abb. 10 und 11 sind die Frequenzgänge, die mittels der Sensoren $fr12$ bzw. $to21$ ermittelt werden, dargestellt.

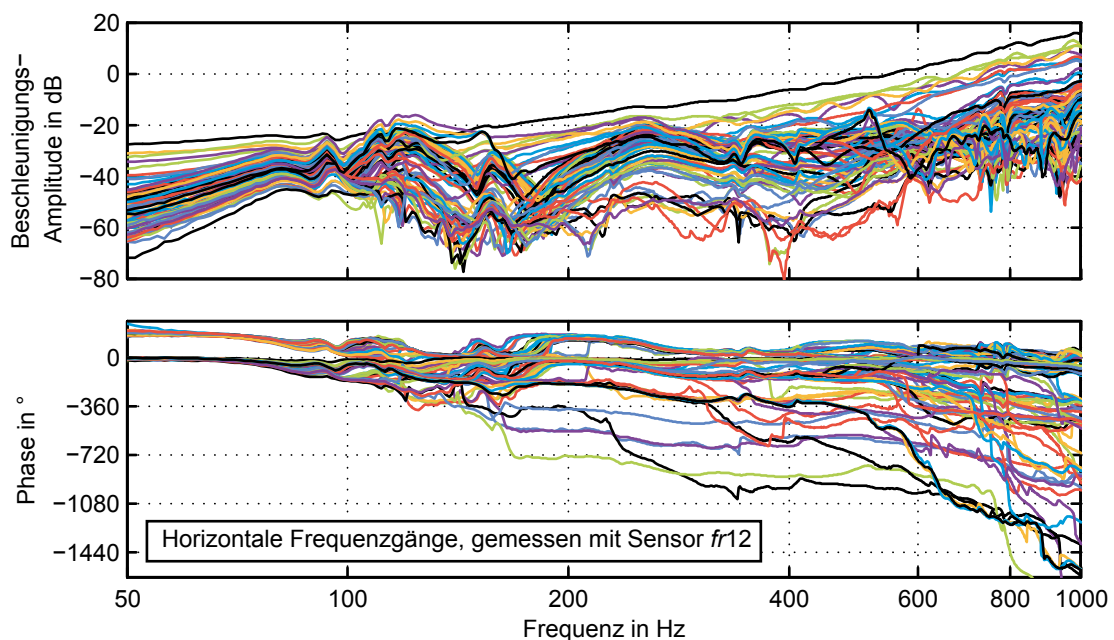


Abbildung 10: Frequenzgänge mit primär horizontaler Anregung auf Welle und Gehäuseseiten und verwendetem horizontalem Sensor $fr12$. Geringe Messqualität bei beachtlicher Anzahl der Frequenzgänge.

Wie in Abb. 9 gesehen, sind für diese beiden Sensoren die *Driving-Point*-Messungen von auffallend niedriger Qualität. Deren Charakteristik, die stetig steigende Amplitude, findet sich in mehreren Frequenzgängen dieser Sensoren wieder. Als systematische Ursachen für dieses Verhalten kommen die Anregungspositionen oder zeitliche Reihenfolge der Messdurchführung in Frage. Fänden sich beispielsweise systematische Veränderungen in Abhängigkeit der Anregungsposition, wie beispielsweise sinkende Amplituden bei Annäherung an die Prüfstandsanbindung, würden diese Messdaten an Plausibilität gewinnen. Dies ist bei den Frequenzgängen dieser Sensoren jedoch nicht der Fall. Ebenso ließe ein ähnliches Verhalten in allen sechs mit einer Anregung ermittelten Frequenzgängen den Rückschluss auf die Anregung als Ursache zu.

Jedoch ist auch dies nicht der Fall. Würde die Messqualität ab einem bestimmten Zeitpunkt der gesamten Messdurchführung abnehmen, käme beispielsweise eine Ablösung der Wachsverklebung des Sensors als Ursache in Betracht. Auch eine solche zeitliche Gesetzmäßigkeit findet sich in den Messdaten nicht wieder.

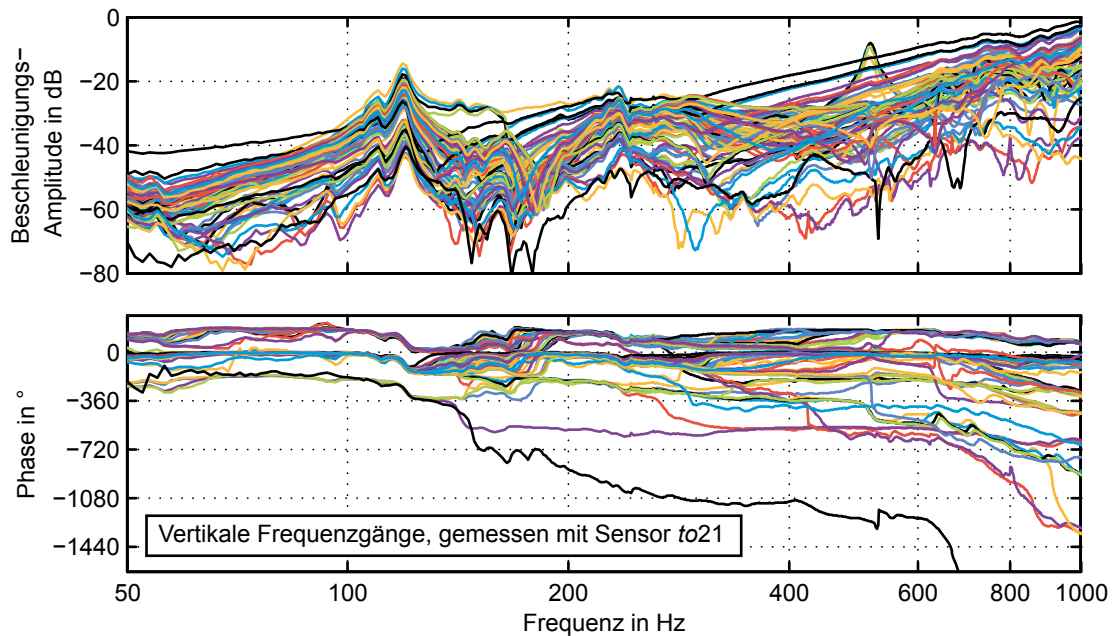


Abbildung 11: Frequenzgänge mit primär vertikaler Anregung auf Welle und Gehäuse-Ober-/Unterseite (to und bo) und verwendetem vertikalem Sensor $to21$. Geringe Messqualität bei beachtlicher Anzahl der Frequenzgänge.

Die Ursache für die Charakteristik dieser Messungen bleibt ungeklärt, weshalb bei der weiteren Auswertung auf die Verwendung der mit diesen Sensoren ermittelten Frequenzgänge verzichtet wird. Dies ist ohne weiteres zulässig, da sowohl die vertikale als auch die horizontale Richtung auf dem Gehäuse mit redundanten Sensoren vermessen wird und somit weiterhin alle relevanten Systeminformationen vorhanden sind.

In Abb. 12 sind alle direkten Frequenzgänge, die mit Sensor $ba1$ und primär horizontaler Anregung ermittelt werden, gezeigt. Die meisten Frequenzgängen sind sich sehr ähnlich. Die vier Frequenzgänge, die sich auffallend im Bereich von 100 Hz bis 300 Hz von den anderen unterscheiden, sind die Frequenzgänge mit Anregung auf der Welle. Die zunehmend verrauschten Frequenzgänge im unteren Amplitudenbereich sind den Anregungen in der Nähe der Antriebsmaschine zugeordnet. Dort gewinnen Masse und Steifigkeit des Prüfstands zunehmend an Bedeutung. Dadurch sinkt der Anteil der in Schwingungen gewandelten eingebrachten Energie, was die geringere Messqualität erklärt. Die entsprechende Abbildung für Sensor $bo3$ liefert hinsichtlich Messqualität keine zusätzlichen Informationen (siehe Anhang Abb. 85).

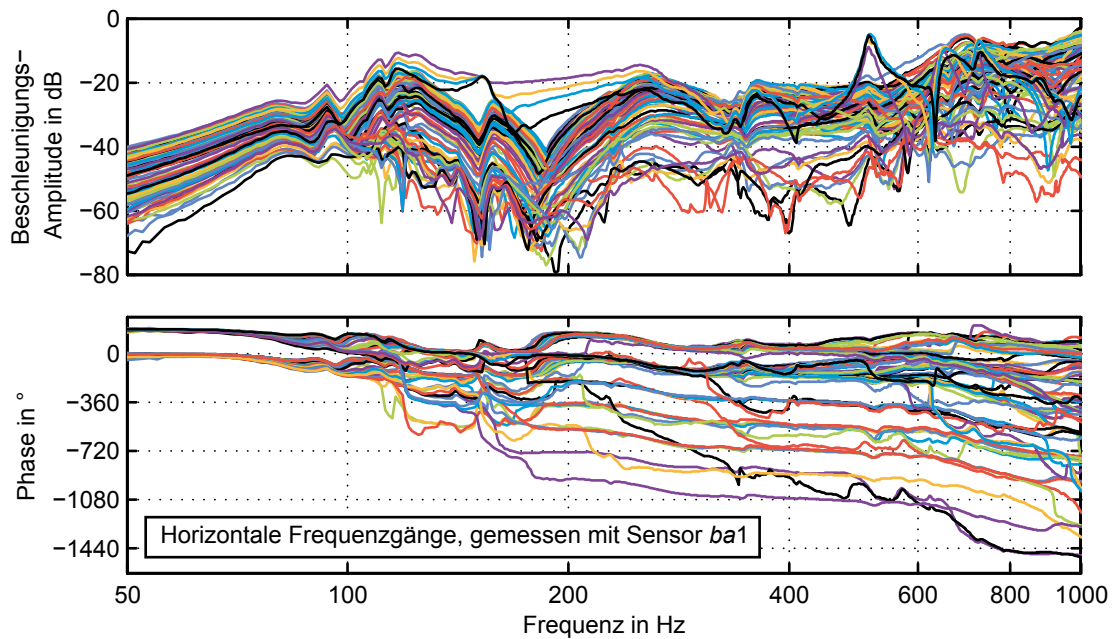


Abbildung 12: Frequenzgänge mit primär horizontaler Anregung auf Welle und Gehäuseseiten (*fr* und *ba*) und verwendetem horizontalem Sensor *ba1*.

In Abb. 13 sind die mit Sensor *ba1* ermittelten Kreuz-Frequenzgänge dargestellt. Im Vergleich zu den direkten Frequenzgängen sind die Amplitudengänge deutlich verrauschter. Die Amplituden liegen generell etwas niedriger als die der direkten Frequenzgänge, was auf die schwächere Kopplung von Anregung und Ausgangsmessung zurückzuführen ist. Dies ist schon durch die in Abb. 6 gezeigte Kohärenz belegt. Die niedrigere Messqualität ist weiterhin an den Phasengängen zu erkennen. Wo die direkten Phasengänge einen summierten Phasenabfall von ca. 1620° aufweisen, fällt die summierte Phase bei den Kreuz-Messungen um über 3600° ab.

In Abb. 14 sind alle direkten Frequenzgänge dargestellt, die mit dem vertikalen Sensor *w3* auf der Welle ermittelt werden. Wieder unterscheiden sich die Frequenzgänge mit Anregung auf der Welle merklich vom Rest. Insbesondere im Bereich über 400 Hz liegt die Amplitude erheblich höher. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Eigenformen in diesem Bereich deutliche Ausprägungen auf der Welle haben. Die entsprechenden Frequenzgänge mit dem horizontalem Wellensensor *w4* liefern ebenfalls sehr ähnliche Ergebnisse (siehe Anhang Abb. 86).

In den dargestellten Frequenzgängen ist ein klarer Unterschied zwischen horizontaler und vertikaler Richtung ersichtlich. So sind beispielsweise nur in den horizontalen Frequenzgängen die zwei Resonanzen unterhalb von 100 Hz ausgeprägt. Für den direkten Vergleich sind in Abb. 15 je zwei vertikale (durchgezogene Linien) und horizontale (gestrichelte Linien) Frequenzgänge mit Anregungspositionen auf dem Gehäuse und Messpositionen auf der Welle dargestellt. Bei gleicher Messrichtung zeigen die Frequenzgänge im gesamten Frequenzbereich ein sehr ähnliches Verhalten. Im Bereich um 100 Hz treten die ersten deutlich ausgeprägten Resonanzen auf.

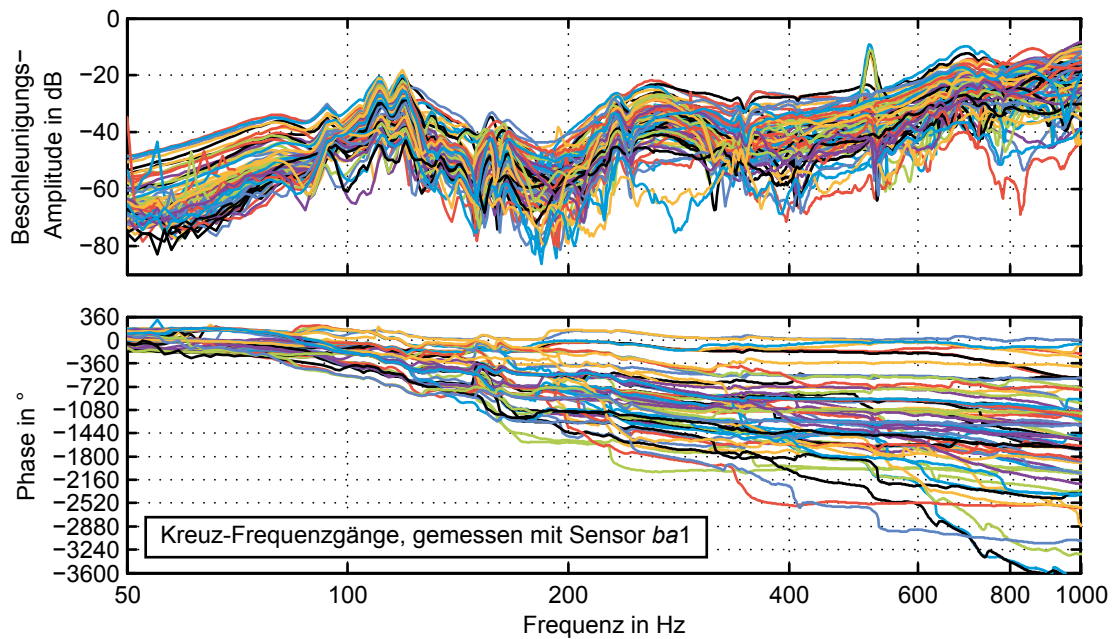


Abbildung 13: Kreuz-Frequenzgänge des Sensors *ba1*.

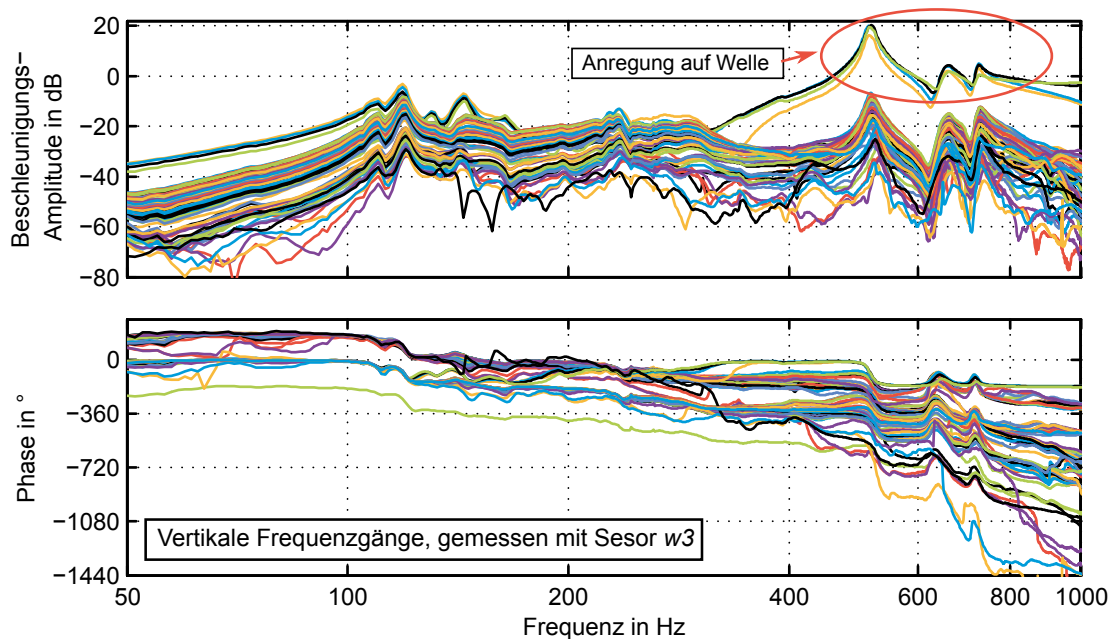


Abbildung 14: Frequenzgänge mit primär vertikaler Anregung auf Welle und Gehäuse-Ober-/Unterseite (*to* und *bo*) und verwendetem vertikalem Sensor *w3*.

Horizontal liegt die niedrigste etwas unterhalb, vertikal etwas oberhalb der 100 Hz. Es folgt bis ca. 400 Hz ein Bereich, in dem offensichtlich Resonanzen liegen, diese sind jedoch nicht

so stark ausgeprägt und weisen einen deutlichen Unterschied zwischen vertikaler und horizontaler Richtung auf. Dies deutet auf eine ausgeprägte Richtungsabhängigkeit der Eigenformen hin. Im Bereich zwischen 400 Hz und 800 Hz treten die für die Frequenzgänge mit Antwort-Freiheitsgrad auf der Welle charakteristischen stark ausgeprägten Resonanzen auf. Hierin unterscheiden sich diese Frequenzgänge deutlich von denen, die das Übertragungsverhalten von Mess-Freiheitsgraden auf dem Gehäuse wiedergeben.

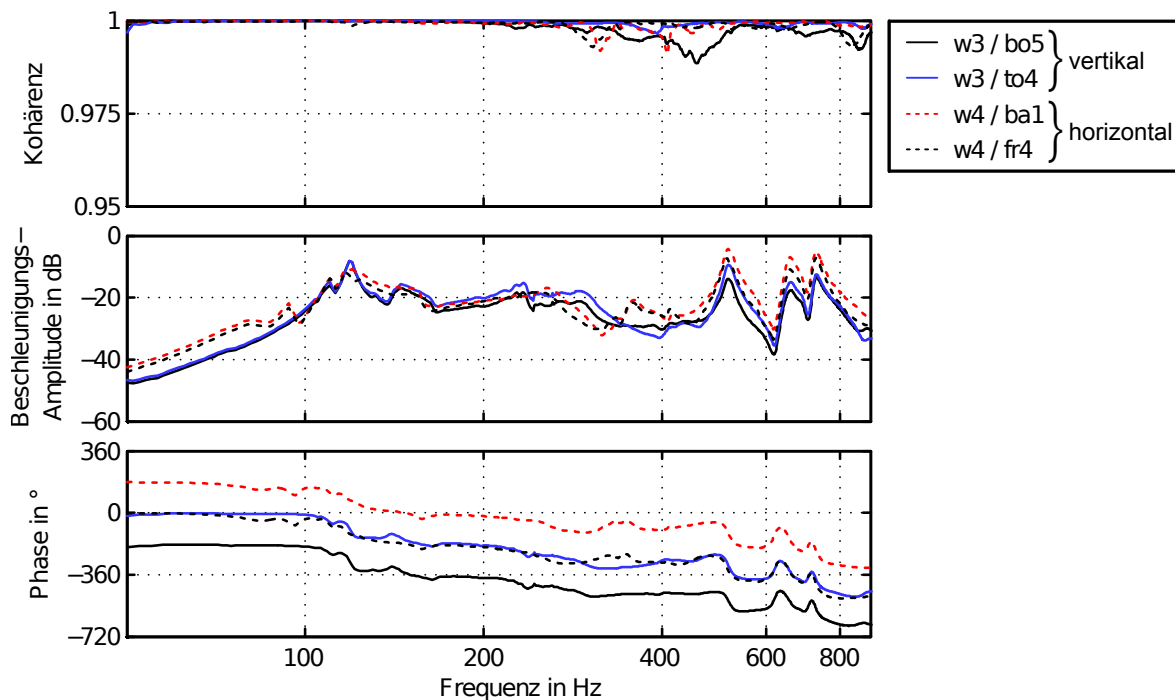


Abbildung 15: Beispielhafte direkte Frequenzgänge in vertikaler und horizontaler Richtung mit Antwort-Freiheitsgraden auf der Welle. Deutliche richtungsabhängige Charakteristik bis 100 Hz und von 130-400 Hz. Der Phasenversatz von 180° ergibt sich aus entgegengesetzter Messrichtung.

Abbildung 16 zeigt beispielhaft diesen Unterschied. Dargestellt sind zwei Frequenzgänge, die aus der identischen Anregung auf dem Gehäuse (*ba1*) und den Ausgangsmessungen auf dem Gehäuse (*ba1*) bzw. der Welle (*w4*) ermittelt werden. Während im Frequenzbereich bis ca. 400 Hz beide Frequenzgänge sowohl im Amplituden- als auch im Phasengang noch deutlich ausgeprägte Pol- und Nullstellen aufweisen, sind im Bereich über 400 Hz nur noch im Frequenzgang der Wellenmessung deutliche Pol- und Nullstellen zu identifizieren. Im anderen Frequenzgang sind nur schwache Überhöhungen und Phasenabfälle bei diesen Frequenzen zu erkennen. Auffällig ist außerdem, dass dieser Frequenzbereich von wenigen Polstellen dominiert wird. Da in der Regel die Resonanzdichte mit steigender Frequenz zunimmt, liegt die Vermutung nahe, dass weitere Resonanzen von den dominanten maskiert werden. Dieser grundsätzliche Unterschied zwischen Gehäuse-Gehäuse- und Gehäuse-Welle-Messungen ist bei allen ermittelten Frequenzgängen zu beobachten. Da wesentlich mehr Gehäuse-Gehäuse-Messungen vorhanden sind, wer-

den diese auch bei der folgenden Auswertung einen stärkeren Einfluss auf die erreichbaren Ergebnisse haben.

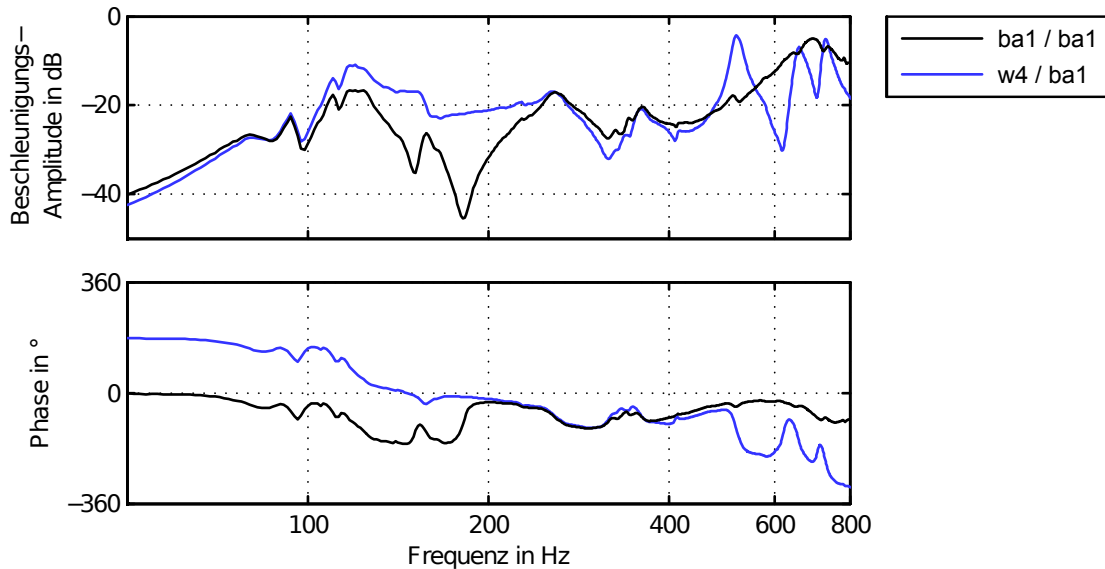


Abbildung 16: Vergleich von Frequenzgängen, ermittelt aus identischer Anregung auf dem Gehäuse und Ausgangsmessung auf dem Gehäuse bzw. der Welle.

2.6.2 Bestimmung der Modellordnung

Die Auswertung der gemessenen Frequenzgänge beginnt mit der Bestimmung der Modellordnung gemäß Kapitel 2.2. Mit Hilfe der dort beschriebenen Verfahren gelingt es hier jedoch nicht, eine zuverlässige Aussage zu erhalten. Aus den Abb. 10 bis 14 ist ersichtlich, dass das bloße Zählen der offensichtlichen Resonanzstellen kein eindeutiges Ergebnis liefert, da zum einen die Resonanzdichte sehr hoch ist und zum anderen im oberen Frequenzbereich wenige Resonanzen den Amplitudengang dominieren. Von diesen können schwächer ausgeprägte Resonanzen maskiert werden. Aus den gleichen Gründen ist auch das zweite genannte Verfahren, die Summation der quadrierten Frequenzgänge, nicht zielführend.

Mit Hilfe der *Multivariate Mode Indicator Functions* gelingt es zumindest in einigen Frequenzbereichen, Polstellen des Systems zu identifizieren. In Abb. 17 sind die MMIFs, die auf allen zur Auswertung herangezogenen Frequenzgängen (Sensoren *ba1*, *bo3*, *w3*, *w4*) basieren, dargestellt.

Die Primäre MIF weist im Frequenzbereich bis ca. 200 Hz und zwischen 400 Hz und ca. 700 Hz mit deutlich ausgeprägten Minima vermeintlich eindeutig auf Eigenfrequenzen hin. In einigen Bereichen liegen diese Minima sehr nah beieinander, was ein erster Hinweis auf eng benachbarte Eigenfrequenzen ist. Bestätigt wird deren Existenz durch ein Minimum in der Sekundären MIF, welches zwischen den beiden Minima der Primären MIF liegt. Überdecken sich

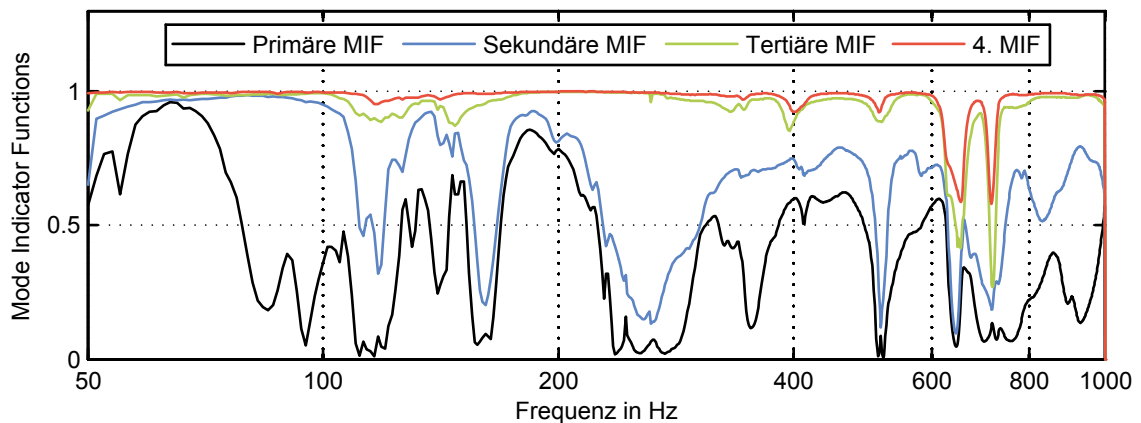


Abbildung 17: *Multivariate Mode Indicator Functions* der final ausgewerteten Frequenzgänge: Minima in der Primären MIF weisen auf Eigenfrequenzen hin, Minima in der Sekundären MIF weisen auf zwei eng benachbarte Eigenfrequenzen hin usw.

die Minima der Primären und Sekundären MIF, liegt eine doppelte Eigenfrequenz vor. So deuten die Primären und Sekundären MIFs beispielsweise auf drei Eigenfrequenzen zwischen 110 und 120 Hz hin. Hinweise auf eine doppelte Eigenfrequenz finden sich bei ca. 645 Hz, die dortigen Minima in der Tertiären und 4. MIF weisen auf zwei weitere Eigenfrequenzen in unmittelbarer Nachbarschaft hin. Die Minima in der Primären MIF bei 512 Hz und 520 Hz und das dortige Minimum in der Sekundären MIF deuten auf zwei sehr nah beieinander liegenden Resonanzfrequenzen hin anhand derer die Aussagekraft der MIFs weiter diskutiert wird.

Werden beispielsweise nicht alle Frequenzgänge zu Grunde gelegt, sondern nur diejenigen, die mit den zwei verwendeten Sensoren auf dem Gehäuse ermittelt werden, ergeben sich die in Abb. 18 gezeigten MMIFs. Hier werden zum einen die drei Eigenfrequenzen zwischen 110 Hz und 120 Hz nicht alle durch die Sekundäre MIF bestätigt. Zum anderen werden die Eigenfrequenzen bei 512 Hz und 520 Hz niedriger, bei 510 Hz und 516 Hz identifiziert.

Die übrigen Frequenzbereiche von ca. 200 Hz bis 400 Hz und ab ca. 600 Hz sind mittels der *Mode Indicator Functions* hinsichtlich der Anzahl der Eigenfrequenzen nicht auswertbar. Sowohl die Primäre, als auch die Sekundäre MIF weisen kaum separate Minima auf, was die Bestimmung von Eigenfrequenzen nahezu unmöglich macht. Auch das Hinzuziehen der Frequenzgänge aus Abb. 12 und 14 führt in diesem Bereich nicht zum Ziel. Zwar treten insbesondere in den vertikalen Frequenzgängen (Abb. 14) einzelne Resonanzen deutlich hervor, es ist jedoch nicht möglich, eine globale Aussage über die Anzahl der vorhanden Eigenfrequenzen und damit der Modellordnung zu treffen.

Im Anhang A.3 sind weitere Primäre MIFs dargestellt. Die Aussagen unterscheiden sich je nach Datenbasis teilweise deutlich. In manchen Bereichen lassen sich Richtungs-Ausprägungen

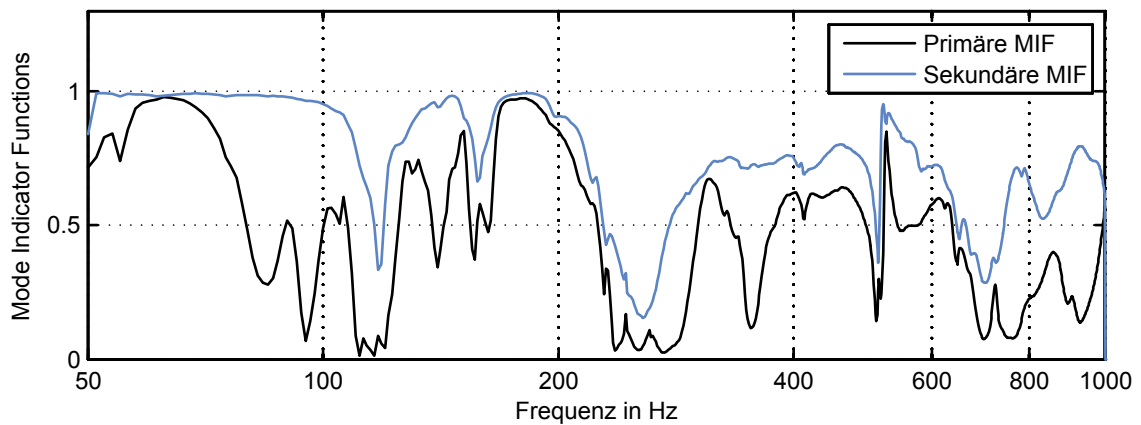


Abbildung 18: MMIFs basierend auf allen Frequenzgängen, die mit Gehäuse-Sensoren ermittelt sind.

einzelner Eigenformen ableiten, in anderen Bereichen liefern die MIFs aber auch mehrdeutige Ergebnisse. Folglich ist auch damit keine eindeutige Ordnungsbestimmung möglich.

Das in Abb. 19 dargestellte Fehlerdiagramm gibt in Abhängigkeit der Modellordnung die Abweichung der nach Gl. (10) mit dem Polyreference-Verfahren approximierten Frequenzgänge von den gemessenen an. Die Datenbasis bilden sämtliche mit den Sensoren *ba1*, *bo3*, *w3* und *w4* gemessenen Frequenzgänge. Der Frequenzbereich wird von 50 Hz bis 800 Hz berücksichtigt. Aus diesem Fehlerdiagramm ist keine Modellordnung abzuleiten, ab welcher der Fehler nur noch geringfügig abnimmt. Diese grundsätzliche Aussage des Fehlerdiagramms ändert sich auch bei geändertem Frequenzbereich oder anderer Datenbasis nicht.

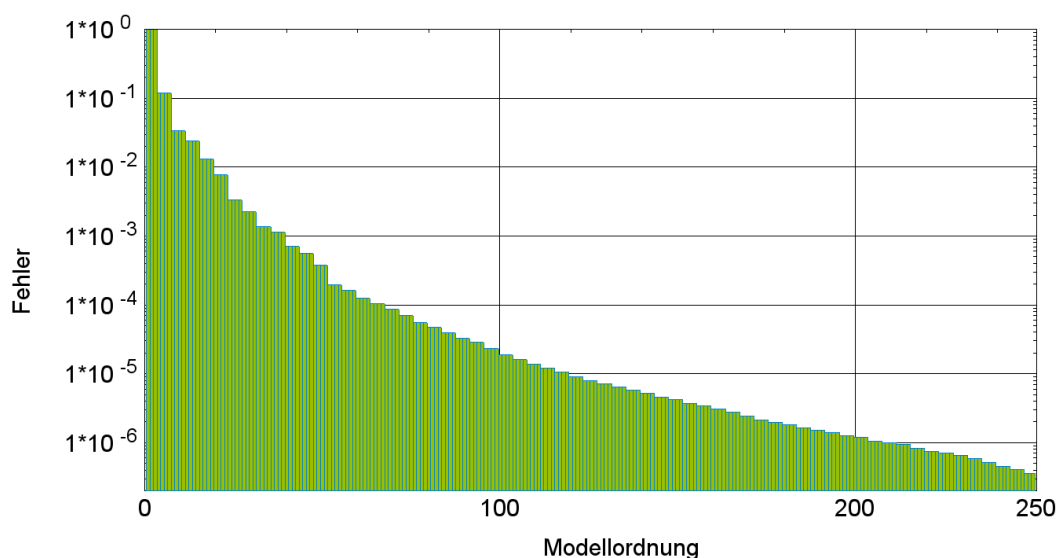


Abbildung 19: Fehlerdiagramm des Polyreference Schätzverfahrens unter Verwendung der vier Sensoren *ba1*, *bo3*, *w3*, *w4* im Frequenzbereich 50 bis 800 Hz.

Das Verfahren, das in *Test for I-deas* standardmäßig zur Ordnungsbestimmung eingesetzt wird, ist das Stabilitäts-Diagramm. Abbildung 20 zeigt dieses beispielhaft für alle Frequenzgänge, die mit den Sensoren *ba1*, *bo3*, *w3* und *w4* ermittelt sind. Dargestellt sind die mit steigender Modellordnung geschätzten Pole über dem Frequenzbereich. Jedem Pol sind die Eigenschaften Eigenfrequenz, Dämpfung und Eigenvektor zugehörig. Es werden stets die Pole aufeinanderfolgender Modellordnungen miteinander verglichen. Ändern sich die Eigenschaften nur in einem begrenzten Bereich, wird die entsprechende Eigenschaft als stabil bezeichnet. Je mehr Eigenschaften sich stabilisieren, desto größer wird das Quadrat, mit dem der Pol über der Frequenzachse markiert wird. Die größten Quadrate geben Pole an, bei denen alle drei Eigenschaften, also der gesamte Parametersatz, stabil sind.

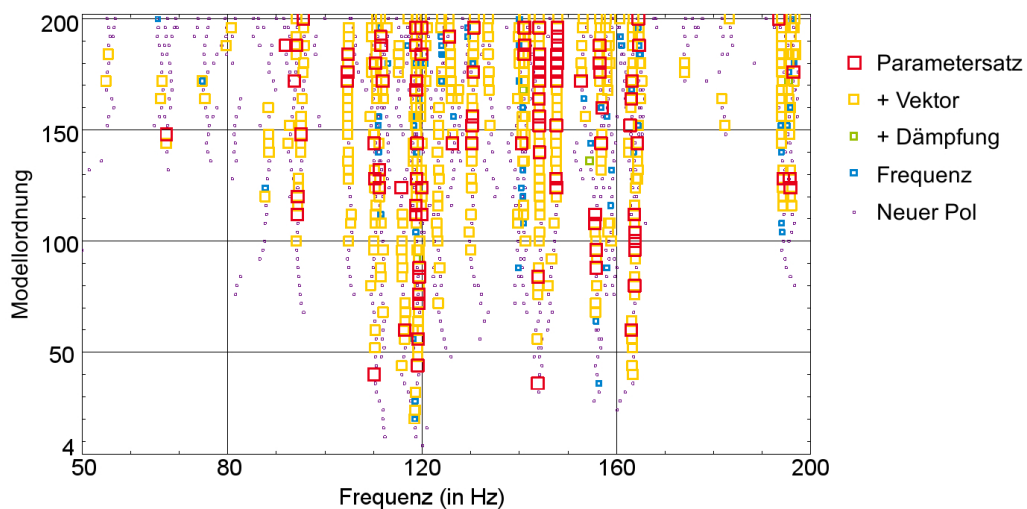


Abbildung 20: Aus final verwendeten Frequenzgängen resultierendes Stabilitätsdiagramm. Mit größer werdenden Quadraten nimmt die Anzahl stabiler Eigenschaften des jeweiligen Pols zu. Die größten Quadrate symbolisieren Pole, die bei mindestens zwei aufeinanderfolgenden Modellordnungen sehr ähnliche (stabile) Parametersätze (Eigenfrequenz, Dämpfung und Eigenvektor) haben.

An dieser Abbildung wird die Schwierigkeit der korrekten Vorhersage der Modellordnung deutlich. Es wird eine Vielzahl an Polen identifiziert. Die unter anderem in [31] beschriebene Tatsache, dass sich tatsächliche Pole im Gegensatz zu numerischen Polen mit zunehmender Modellordnung stabilisieren, also Änderungen in Eigenfrequenz, Dämpfung und Eigenvektor minimal werden, ist aus dem gezeigten Stabilitätsdiagramm nicht ersichtlich. So deuten beispielsweise sowohl die Frequenzgänge (z. B. Abb. 12) als auch die *Mode Indicator Functions* (Abb. 17) auf eine Resonanz bei ca. 80 Hz hin. Im Stabilitätsdiagramm wird für diese jedoch unabhängig von der Modellordnung kein stabiler Parametersatz gefunden. Im Gegensatz dazu werden bei einigen Frequenzen Polstellen mit stabilen Parametersätzen identifiziert, die sich bei steigender Modellordnung wieder ändern. Eine zuverlässige Aussage, bei welchem Wert die entsprechenden Eigenfrequenzen tatsächlich liegen, ist somit nicht möglich.

Diese Tatsachen belegen, dass die wenigsten Pole zuverlässig identifizierbar sind. Das hier gezeigte Verhalten spiegelt sich auch im restlichen Frequenzbereich wieder, was verdeutlicht, dass auch mit dem Stabilitätsdiagramm keine eindeutige Aussage hinsichtlich der Modellordnung möglich ist.

2.6.3 Zwischenfazit zur Bestimmung der Modellordnung

Mit den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln ist es in *Test for I-deas* nicht zweifelsfrei möglich, die korrekte Modellordnung zu bestimmen. Daher wird hierauf an dieser Stelle verzichtet. Statt dessen wird zunächst eine übertrieben hohe Modellordnung angesetzt. Bei der weiteren Auswertung wird anschließend auf eine Kombination des Stabilitätsdiagramms, der *Mode Indicator Functions* und der Frequenzgänge zurückgegriffen, um die schließlich ausgewählten Parameter zu plausibilisieren.

Der Vollständigkeit halber wird hier darauf hingewiesen, dass alternative Methoden zur Bestimmung der Modellordnung existieren, diese jedoch nicht in der verwendeten Software implementiert sind. So wird beispielsweise in [27] der *Pole Density Plot* angewandt, der neben den gleichen Eigenschaften wie das Stabilitätsdiagramm auch die statistischen Eigenschaften der bei verschiedenen Modellordnungen geschätzten Parametersätze berücksichtigt. Tritt ein ähnlicher Parametersatz bei vielen verschiedenen Modellordnungen auf, wird er als wahrscheinlicher eingestuft als einer, der nur bei einer bestimmten Modellordnung auftritt.

2.6.4 Ergebnis der Parameterschätzung

Das im vorigen Kapitel diskutierte Stabilitäts-Diagramm bildet die Grundlage der Ergebnisse der Parameterschätzung. Dieses wird für die softwareseitig höchst mögliche Modellordnung von 250 erstellt. Daraus werden automatisch, einzig basierend auf den Stabilitätseigenschaften, Parametersätze ausgewählt. Nach Analyse der Frequenzgänge und MMIFs werden manuell weitere Parametersätze hinzugefügt oder auch entfernt. Dabei werden stabile Parametersätze mit hohem *Mode Confidence Factor* (Eigenform-Vertrauensfaktor) bevorzugt. Dieser korreliert die zu einer bestimmten Eigenform zugehörige Schwingung an einem Antwort-Freiheitsgrad mit der dortigen Schwingung zu späteren Zeitpunkten. Eine hohe Korrelation tritt nur bei tatsächlich vorhandenen Eigenformen auf [37]. Weisen sowohl die Frequenzgänge als auch die *Mode Indicator Functions* auf eine Resonanzfrequenz hin, für die kein stabiler Parametersatz existiert, werden auch Pole ausgewählt, deren Dämpfungswert nicht stabil ist. Werden sehr nah beieinander liegende Pole automatisch ausgewählt, werden diese nur beibehalten, wenn deren Existenz durch die *Mode Indicator Functions* belegt ist.

Die auf diese Art erhaltenen Parameter sind in Tabelle 1 aufgelistet und in Abb. 21 zusammen mit acht charakteristischen Frequenzgängen gezeigt. Jeweils vier horizontale und vertikale Frequenzgänge decken die Richtungsabhängigkeit ab. Die unterschiedlichen Charakteristika der Gehäuse-Gehäuse- und Welle-Welle-Frequenzgängen ist durch die Auswahl ebenfalls berücksich-

sichtigt. Die Eigenfrequenzen der Parameter sind durch senkrechte Linien, die zugehörigen Dämpfungsgrade (rechte Ordinate) durch rote Quadrate markiert. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass die Frequenzen der meisten Parameter durch Amplitudenüberhöhungen in zumindest bestimmten Frequenzgängen belegt werden.

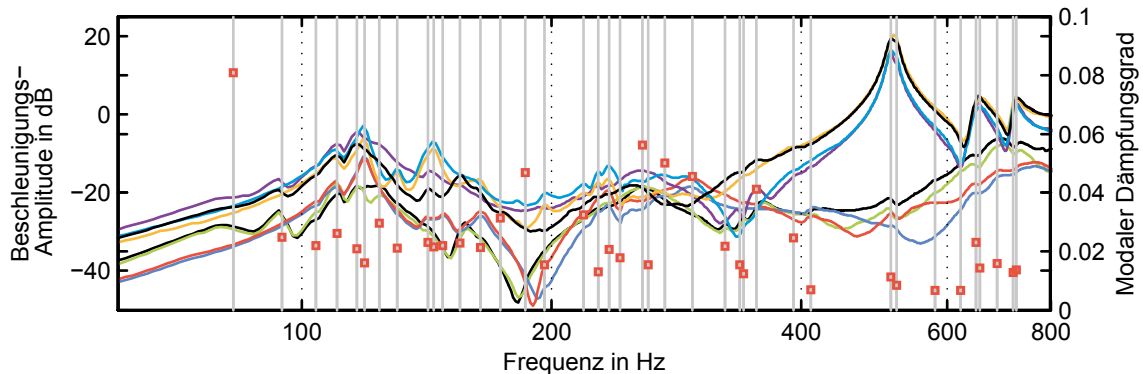


Abbildung 21: Identifizierte Parameter und charakteristische Amplitudengänge. Senkrechte Linien markieren die identifizierten Eigenfrequenzen, Quadrate auf diesen die zugehörigen Dämpfungsgrade. Die charakteristischen Amplitudengänge spiegeln das gesamte Systemverhalten in horizontaler und vertikaler Richtung sowohl auf dem Gehäuse als auch der Welle wieder.

Ob auch die Dämpfungswerte plausibel sind, ist mit Hilfe der Frequenzgänge nicht zu überprüfen; lediglich eine relative Aussage ist hier möglich. So ist beispielsweise ersichtlich, dass der Dämpfungswert der niedrigsten Resonanzfrequenz höher sein wird als der der meisten anderen Resonanzfrequenzen. Eine absolute Aussage ist jedoch aufgrund der hohen Dichte der Resonanzen nur eingeschränkt möglich. Dies ist insbesondere für die korrekte Bestimmung der Eigenformen relevant. Ist der Dämpfungsgrad einer Resonanz hoch, wächst der beeinflusste Frequenzbereich. Liegt in diesem Einflussbereich eine weitere Resonanz, muss dies bei der Bestimmung der Eigenform berücksichtigt werden. Wird ein Dämpfungsgrad zu niedrig angesetzt, wird der Einfluss in den eng benachbarten Resonanzen unterschätzt, was ebenfalls zu einer Fehlschätzung der Eigenformen führt.

Im folgenden Kapitel werden die Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse, die ermittelten Eigenformen, gezeigt und diskutiert.

Tabelle 1: Identifizierte Parameter: Resonanzfrequenzen und modale Dämpfungen

Nummer	1	2	3	4	5	6	7
Frequenz (in Hz)	82,7	94,6	104,0	110,2	116,5	119,1	124,1
Dämpfung (in %)	8,1	2,5	2,2	2,6	2,1	1,6	3,3

Nummer	8	9	10	11	12	13	14
Frequenz (in Hz)	130,3	141,9	144,2	148,0	155,2	164,1	173,7
Dämpfung (in %)	2,1	2,3	2,2	2,2	2,3	2,1	3,1

Nummer	15	16	17	18	19	20	21
Frequenz (in Hz)	186,0	196,1	218,8	227,7	235,0	242,0	257,6
Dämpfung (in %)	4,7	1,5	3,2	1,3	2,1	1,8	5,6

Nummer	22	23	24	25	26	27	28
Frequenz (in Hz)	261,8	274,1	296,0	323,9	337,3	341,2	353,5
Dämpfung (in %)	1,5	5,0	4,6	2,1	1,5	1,2	4,1

Nummer	29	30	31	32	33	34	35
Frequenz (in Hz)	391,8	410,8	513,1	521,8	580,8	623,4	650,3
Dämpfung (in %)	2,5	0,7	1,1	0,9	0,7	0,7	2,30

Nummer	36	37	38	39
Frequenz (in Hz)	657,3	689,2	721,0	727,6
Dämpfung (in %)	1,4	1,6	1,3	1,4

2.6.5 Ergebnis der Eigenformschätzung

Die Eigenformen entsprechen den Eigenvektoren ψ_l und folgen aus der *Least-Square*-Lösung (Methode der kleinsten Quadrate) der Gl. (9), nachdem die in Abb. 21 dargestellten Parameter λ_l sowie die Beteiligungsmatrix \mathbf{P} über den in Kapitel 2.1 beschriebenen Zwischenschritt bestimmt sind.

Bei der Darstellung der Eigenformen wird auf die typische drei-dimensionale Darstellung verzichtet, da in diesem Fall nie die gesamte vermessene Oberfläche sichtbar ist. Statt dessen wird die Getriebeoberfläche vereinfacht als abgewickelter Zylinder angenommen, wie es in Abb. 22 dargestellt ist. Die Schnittkante des Zylinders entspricht einer wellenparallelen Geraden an der Unterseite des Getriebes.

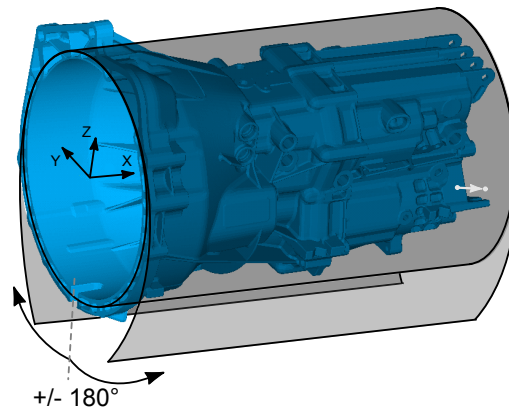


Abbildung 22: Zur Zylinderprojektion der Eigenformen: Die senkrecht zur Getriebeoberfläche gerichteten Auslenkungen werden auf den hier dargestellten Zylinder projiziert.

Die Messpositionen sind definiert durch die Winkelkoordinaten entsprechend ihrer Position in Umfangsrichtung und der Position in Getriebe-Längsrichtung. An allen Messpositionen wird senkrecht zur Oberfläche angeregt, was die direkte Übertragbarkeit der Eigenvektoreinträge auf die Normalenrichtung der abgewickelten Darstellung ermöglicht. Verzerrungsbehaftet ist diese Darstellung jedoch in der gezeigten Ebene, da für die Interpolation von der dargestellten Rechteckfläche ausgegangen wird. Trotz dieser Einschränkung eignet sich diese Darstellung für die Beurteilung des globalen Schwingverhaltens.

In den Abb. 23 bis 27 sind einige der Eigenformen dargestellt (die übrigen befinden sich im Anhang). Sie sind jeweils so skaliert, dass die modale Masse der jeweiligen Eigenform gleich 1 ist. Die Messpunkte sind mit schwarzen Punkten markiert. Diese bilden die Basis der Interpolation über die gesamte Fläche. Beispielhaft werden einige Eigenformen hier näher erläutert.

Die erste Eigenform (vgl. Abb. 23) ist eine ausgeprägte Horizontalschwingung des Getriebes und der Welle. Im mittleren Streifen der Gehäusedarstellung, welcher der Getriebeoberseite entspricht, liegen die Auslenkungen nahezu bei Null, ebenso am oberen und unteren Rand bei $\pm 180^\circ$, was der Getriebeunterseite entspricht. Getriebeeingangsseitig bei $x < 30$ mm sind die meisten Auslenkungen abweichend von Null, was ein Zeichen dafür ist, dass der dort angekoppelte Prüfstand nicht ideal starr, sondern an dieser Eigenform beteiligt ist. Die betragsmäßig maximalen Auslenkungen des Gehäuses finden sich getriebeausgangsseitig bei $x = 500$ mm bei ca. -50° und 80° .

Die vierte Eigenform (vgl. Abb. 24) ist eine Biege-Schwingung in Richtung der y-z-Diagonalen. Die betragsmäßig minimalen Normalenauslenkungen des Gehäuses verlaufen entlang der 150° -Linie sowie an der in Abb. 22 dargestellten vordersten der vier oberen Versteifungsrippen bei ca. -45° . Am Getriebeeingang sind die Auslenkungen minimal, was zeigt, dass der Prüfstand bei dieser Resonanz nahezu ideal starr wirkt. Das ist auch bei allen weiteren Eigenformen der Fall.

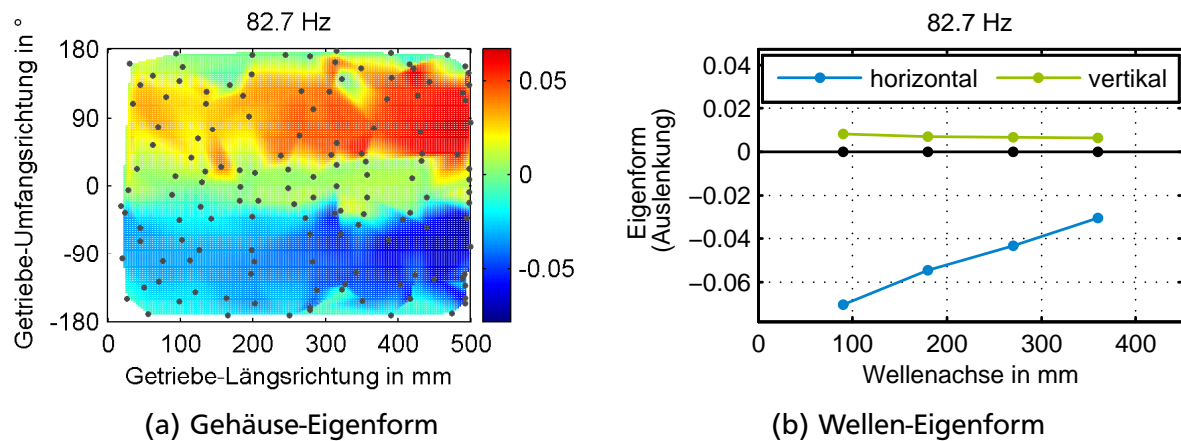


Abbildung 23: Erste experimentell ermittelte Eigenform.

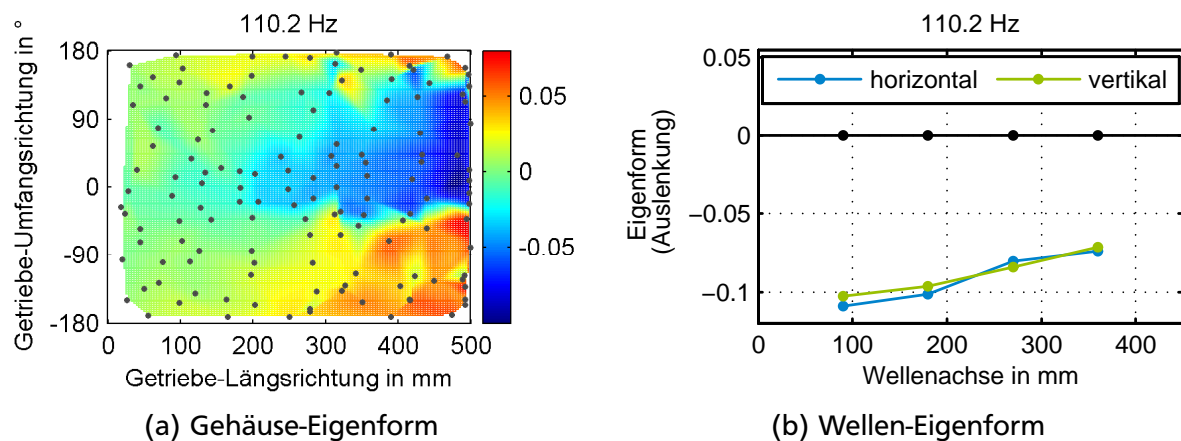


Abbildung 24: Vierte experimentell ermittelte Eigenform.

Die fünfte Eigenform (vgl. Abb. 25) ist eine Horizontalschwingung mit einer schwach ausgeprägten Grenzlinie bei ca. 300 mm. Oberhalb dieser sind die Auslenkungen deutlich größer als unterhalb. An dieser Position befindet sich die Verschraubungsfläche der zwei Getriebehälften, die diesen Nachgiebigkeitssprung erklärt. Diese Grenzlinie ist bei vielen Eigenformen festzustellen. Die Welle hat horizontal ebenfalls die größeren Auslenkungen.

Die sechste Eigenform (vgl. Abb. 26) ist hauptsächlich vertikal ausgeprägt. Die größten Auslenkungen finden sich ausgangsseitig auf der Oberseite des Getriebes bei ca. 5° und auf der Unterseite bei ca. 165°. Auch die Welle zeigt vertikal und besonders am Getriebeausgang die größten Auslenkungen.

In Abb. 27 ist die 31. Eigenform dargestellt. Dies ist die erste Eigenform bei der an konstanter Umfangsrichtung über die Getriebe-Länge deutlich ausgeprägte Auslenkungen in sowohl positive als auch negative Richtungen auftreten.

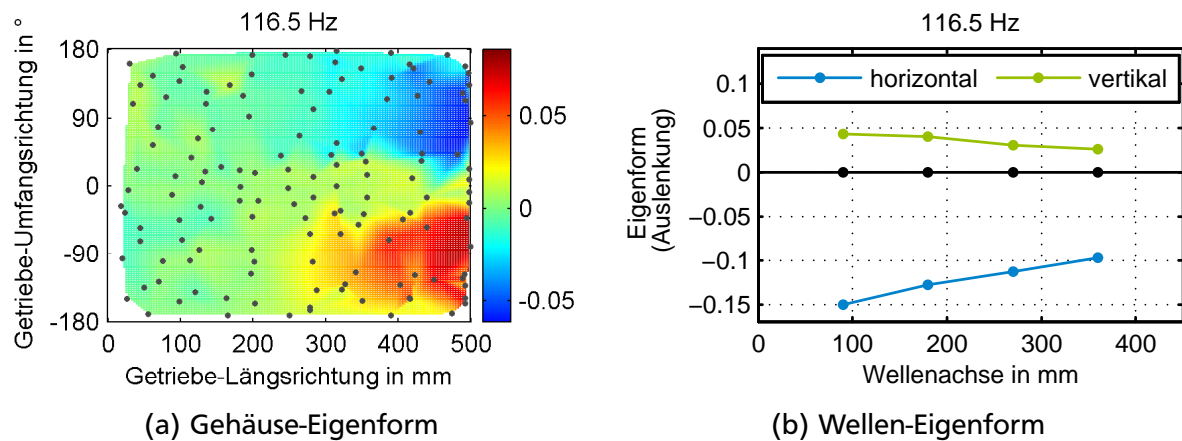


Abbildung 25: Fünfte experimentell ermittelte Eigenform.

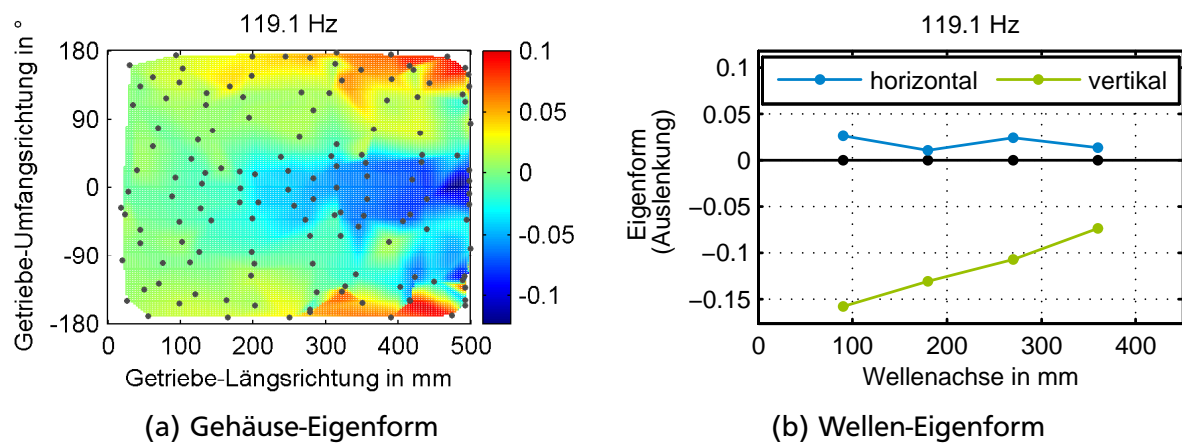


Abbildung 26: Sechste experimentell ermittelte Eigenform.

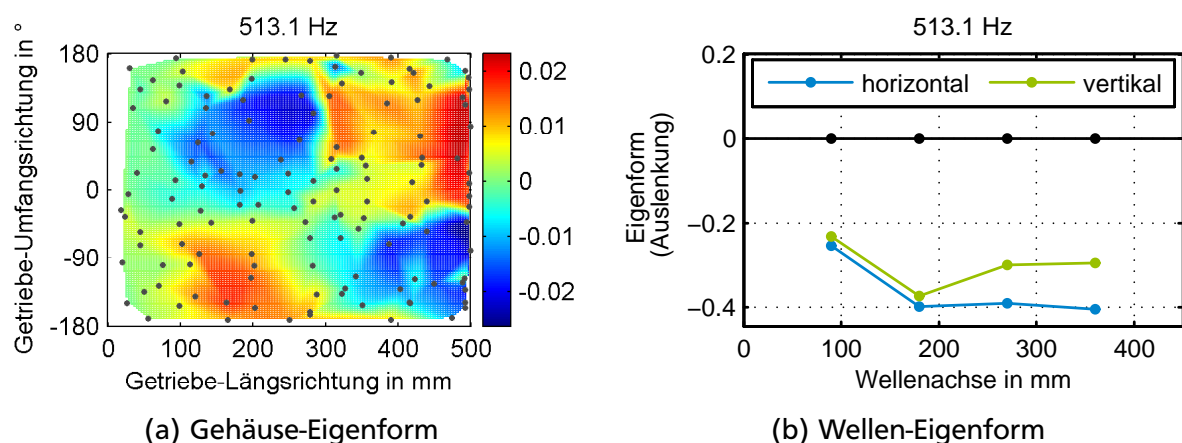


Abbildung 27: 31. experimentell ermittelte Eigenform.

Werden nur die Teil-Eigenformen des Gehäuses betrachtet, fällt eine grundsätzliche Änderung ab ca. 500 Hz auf. Zur Erläuterung ist in Abb. 28 als Analogie ein einseitig elastisch

gelagerter Balken dargestellt. Bis 500 Hz entsprechen die Gehäuseeigenformen näherungsweise der linken Darstellung; Eigenformen mit maximal $\frac{1}{4}$ Wellenlänge bilden sich aus. Oberhalb von 500 Hz bilden sich Gehäuse-Eigenformen bis ca. $\frac{3}{4}$ Wellenlänge aus. Bei diesen Eigenformen treten aufgrund der größeren Krümmungen größere Dehnungen im Gehäuse auf. Dies ist ein wichtiger Aspekt für die im weiteren Verlauf ausgewählten Aktorpositionen.

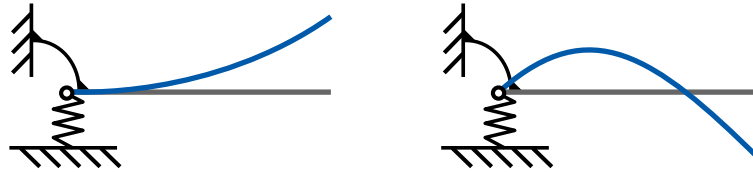
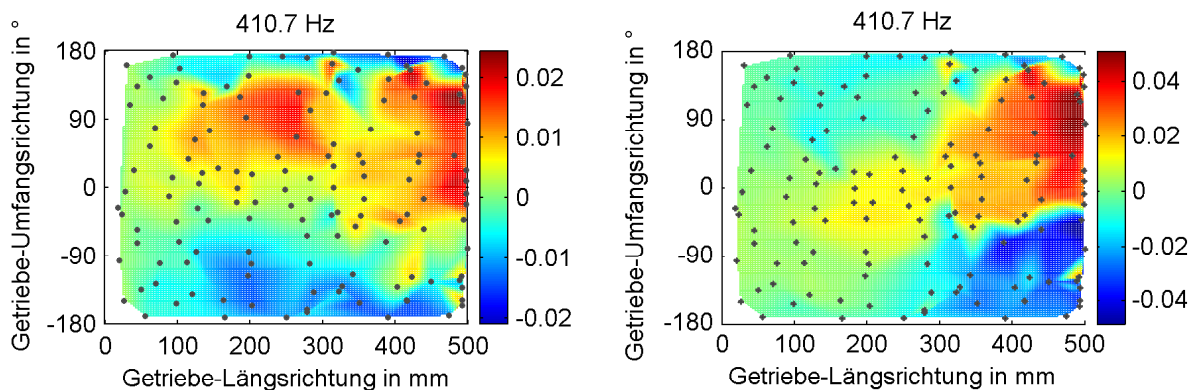


Abbildung 28: Analogie der Gehäuse-Eigenformen zu einfachem Balken. Links: Eigenform mit ca. $\frac{1}{4}$ Wellenlänge; Rechts: Eigenform mit ca. $\frac{3}{4}$ Wellenlänge.

Bis 500 Hz unterscheiden sich die Eigenformen vor allem durch die Richtung der Gehäuseschwingungen und durch die Richtung der Wellenschwingungen. Dabei sind die Auslenkungen der Bauteile im Inneren des Getriebes nicht berücksichtigt, da diese messtechnisch nicht erfasst werden.

Die hier gezeigten Eigenformen basieren auf dem in Tabelle 1 gezeigten Parametersatz. Wie bereits in Kapitel 2.6.2 diskutiert, ist dieses Ergebnis stark von der verwendeten Datenbasis abhängig. Werden bei der Parameterauswahl statt der in Abb. 17 gezeigten MMIFs die in Abb. 18 gezeigten MIFs berücksichtigt und entsprechend Parameter bei 510 Hz und 516 Hz ausgewählt, ändern sich die Eigenformen über einen sehr großen Frequenzbereich. Exemplarisch sind in Abb. 29 zwei sehr verschiedene Gehäuse-Eigenformen bei identischer Frequenz gegenübergestellt, die aus den zwei unterschiedlichen Parametersätzen resultieren. Auch die Wellen-Eigenformen unterscheiden sich deutlich.



(a) 30. Gehäuse-Eigenform bei Parametersatz aus Tab. 1 (b) 30. Gehäuse-Eigenform bei geändertem Parametersatz

Abbildung 29: 30. Eigenform, experimentell ermittelt mit unterschiedlichen Parametersätzen.

Andere Eigenformen bleiben nahezu identisch. Wie groß der Einfluss der Änderung dieser beiden Resonanzen auf das resultierende Gesamtergebnis (die Eigenformen über den gesamten Frequenzbereich) ist, zeigt sich in Abb. 30 in der *Modal Assurance Criterion Matrix* (MAC-Matrix). Die Einträge dieser Matrix werden für zwei Parametersätze mit identischer Anzahl an Eigenvektoren nach Gl. (16) berechnet [38]. Bei übereinstimmenden Eigenvektoren nehmen die Diagonaleinträge den Wert 1 an.

$$MAC_{jk} = \frac{\left| \boldsymbol{\psi}_{1,j}^T \boldsymbol{\psi}_{2,k} \right|^2}{\left(\boldsymbol{\psi}_{1,j}^T \boldsymbol{\psi}_{1,j} \right) \left(\boldsymbol{\psi}_{2,k}^T \boldsymbol{\psi}_{2,k} \right)} \quad j, k = 1, 2, \dots, L \quad (16)$$

Für Parametersätze mit unterschiedlich vielen Eigenvektoren, wie es bei zu vergleichenden experimentell und numerisch ermittelten Parametersätzen häufig der Fall ist, wird

$$MAC_{jk} = \frac{\left| \boldsymbol{\psi}_{1,j}^T \boldsymbol{\psi}_{2,k} \right|^2}{\left(\boldsymbol{\psi}_{1,j}^T \boldsymbol{\psi}_{1,j} \right) \left(\boldsymbol{\psi}_{2,k}^T \boldsymbol{\psi}_{2,k} \right)} \quad j = 1, 2, \dots, L_{num}, \quad k = 1, 2, \dots, L_{exp} \quad (17)$$

verwendet. Im vorliegenden Fall weisen nur wenige Diagonaleinträge den Wert 1 auf, obwohl sich viele Gehäuse-Eigenformen gleichen. Geringe MAC-Werte entstehen entweder durch viele kleine relative Abweichungen oder durch wenige große absolute Abweichungen. Somit erklären die häufig sehr unterschiedlichen Wellen-Eigenformen die geringen Werte, denn diese haben aufgrund ihrer betragsmäßig oft größeren Werte deutlichen Einfluss. Dieses Resultat zeigt einmal mehr, dass die ermittelbaren Ergebnisse mit erheblichen Unsicherheiten behaftet sind.

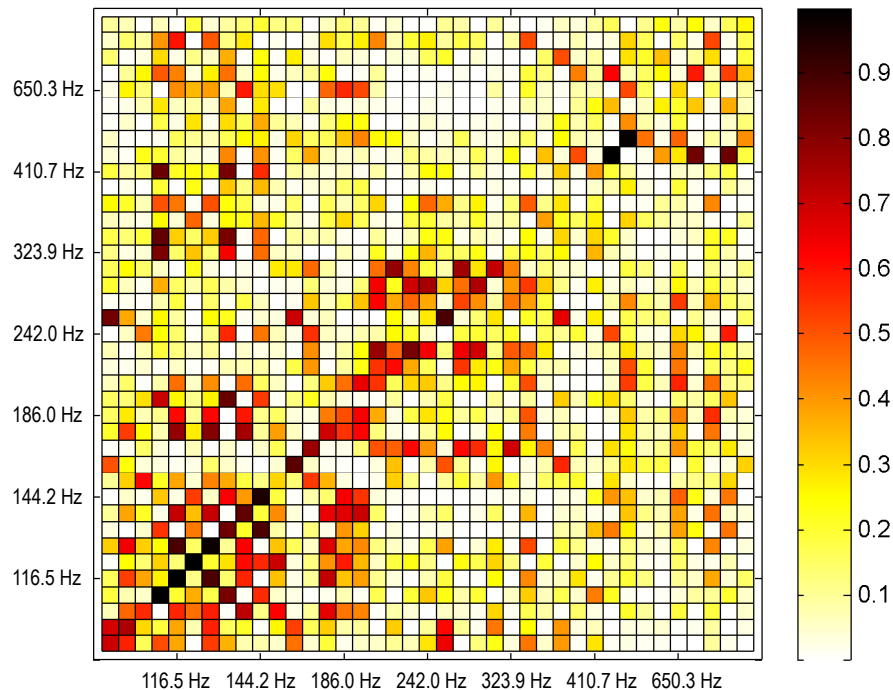


Abbildung 30: *Modal Assurance Criterion Matrix* der Gesamt-Eigenformen (Gehäuse und Welle), die auf den zwei verschiedenen Parametersätzen basieren.

2.6.6 Vergleich der gemessenen und der analytisch bestimmten Frequenzgänge

Für eine abschließende Beurteilung der ermittelten Eigenformen werden einzelne gemessene Frequenzgänge mit analytisch aus den 39 identifizierten Eigenformen und -frequenzen nach Gl. (8) erstellten Frequenzgängen verglichen. Dies geschieht programmintern in *Test for I-deas*. In Abb. 31 und 32 sind beispielhaft zwei *Driving-Point*-Frequenzgänge dargestellt. Sie spiegeln die grundsätzlichen Unterschiede sehr gut wider. Bis 200 Hz gelingt generell eine sehr gute Übereinstimmung. Für die Wellen-Frequenzgänge (Abb. 31) funktioniert das auch darüber hinaus. Bei den Gehäuse-Frequenzgängen nimmt die Übereinstimmung jedoch mit zunehmender Frequenz ab (Abb. 32). Die Gründe hierfür sind in den diskutierten Unsicherheiten der verschiedenen Schritte der experimentellen Modalanalyse zu finden.

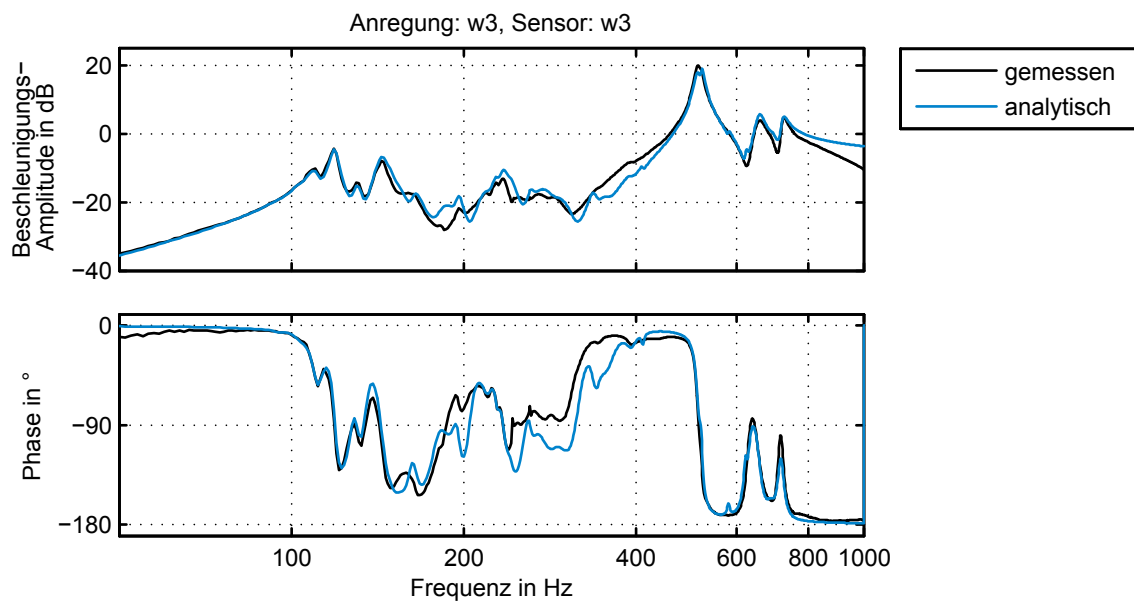


Abbildung 31: Vergleich der gemessenen und analytischen *Driving-Point*-Frequenzgänge an Position w_3 .

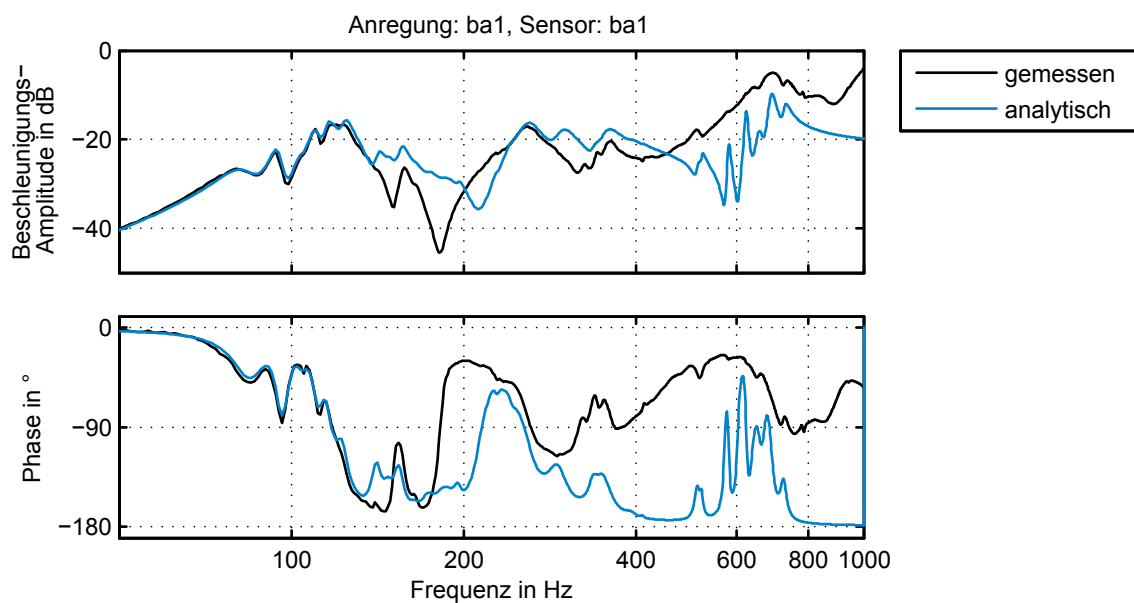


Abbildung 32: Vergleich der gemessenen und analytischen *Driving-Point*-Frequenzgänge an Position ba_1 .

2.7 Fazit zur experimentellen Modalanalyse

Von den Grundlagen der experimentellen Modalanalyse bis zu den damit erzielbaren Ergebnissen zeigt sich, dass das gesamte Vorgehen viele Unsicherheiten mit unterschiedlich bedeutenden Konsequenzen birgt. Dies gilt es bei der weiteren Verwendung der Ergebnisse stets zu berücksichtigen.

Viele der Unsicherheiten sind durch die geometrische Komplexität und Menge der Einzelbauteile des untersuchten Getriebes begründet. Modale Eigenschaften einfacher Strukturen wie beispielsweise Platten sind im Gegensatz dazu wesentlich zuverlässiger mit experimentellen Methoden zu identifizieren. Hier spielt auch die unvollständige Beobachtbarkeit des Systems eine Rolle: Die Bauteile im Inneren des Getriebes wie Wellen, Zahnräder, Schaltgabeln etc. sind messtechnisch nicht erfassbar. Ebenso ist die Prüfstandumgebung nicht erfasst. Das erschwert die vollständige Identifikation der modalen Parameter. Außerdem ist die Anregbarkeit der verschiedenen Eigenformen des Systems an den unterschiedlichen Positionen von großer Bedeutung für die Ergebnisse. Diese ist am untersuchten Getriebe aufgrund der großen Masse und hohen Gesamtsteifigkeit in Kombination mit der verwendeten Impulsanregung nicht optimal, da hiermit nur wenig Anregungsenergie in das System geleitet wird. Andererseits ist die Anregung mittels eines elektrodynamischen Schwingerregers aufgrund des damit verbundenen Aufwandes zur Ankopplung an die verschiedenen Messstellen kaum praktikabel.

Bei der Messauswertung spielt die geometrische Komplexität und Anzahl der Bauteile ebenfalls eine wesentliche Rolle. Die daraus resultierende große Anzahl an Eigenfrequenzen, die teilweise nah beieinander liegen, bringt bei dem verwendeten Messverfahren die beschriebenen Schwierigkeiten mit sich, die bei einfachen Strukturen nicht in vergleichbarem Maße bestehen.

Letztendlich hängt die Qualität der erzielbaren Ergebnisse auch von den bei der Auswertung verwendeten Algorithmen ab. Die in der zur Verfügung stehenden Software implementierten Verfahren entsprechen nicht den neuesten Entwicklungen im Bereich der Systemidentifikation. Es existieren einige Weiterentwicklungen des *Frequency Polyreference* Algorithmus, die sowohl bei der Bestimmung der Modellordnung als auch bei der Parameteridentifikation bessere Ergebnisse zu liefern versprechen (vgl. bspw. [27, 33, 34, 35, 39]). Gründe hierfür sind beispielsweise die Möglichkeit, definierte Übertragungsfunktionen von der Auswertung auszuschließen. Die Qualität einer so ausgewerteten Modalanalyse steigt dadurch beispielsweise oft schon durch die Vernachlässigung der Kreuzübertragungsfunktionen.

3 Numerische Modalanalyse am Finite-Elemente-Modell

Mit der numerischen Modalanalyse wird das Eigenwertproblem

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_l = \lambda_l \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_l \quad (18)$$

des durch die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und die Massenmatrix \mathbf{M} beschriebenen Finite-Elemente-Systems gelöst [40]. Verwendet wird hierfür der *Block-Shifted-Lanczos-Algorithmus* [41]. Dieser wird von ANSYS® in [42] für Probleme mit sehr vielen Freiheitsgraden ($\geq 1 \cdot 10^6$) empfohlen. Auf die Grundlagen der numerischen Berechnungsverfahren wird hier nicht näher eingegangen. ANSYS® ist eine etablierte kommerzielle Software, auf deren implementierte Algorithmen der Nutzer nur minimalen Einfluss hat. Den wesentlichen nutzerbedingten Einfluss auf die Ergebnisse hat die Art der Modellierung des zu untersuchenden Systems. Daher wird auf diese im folgenden näher eingegangen. Grundlagen der numerischen Berechnungsverfahren finden sich beispielsweise in [40, 43, 44, 45].

Aus Gl. (18) resultieren die Eigenwerte λ_l und die Eigenvektoren $\boldsymbol{\psi}_l$. Die numerisch bestimmten Eigenwerte unterscheiden sich von den experimentell ermittelten im Idealfall nur durch die fehlende Dämpfung. Diese wird im Finite-Elemente-Modell (FE-Modell) nicht berücksichtigt, stattdessen werden beim Aufbau des später verwendeten elektromechanisch gekoppelten Gesamtsystems die experimentell ermittelten Werte verwendet. Die numerisch bestimmten Eigenvektoren beinhalten im Idealfall die experimentell ermittelten Eigenvektoren als Untermenge. Die Dimension der experimentell ermittelten Eigenvektoren entspricht der Anzahl der Messpositionen, die Dimension der numerisch ermittelten der Anzahl der Knoten des FE-Modells multipliziert mit der Anzahl der Freiheitsgrade der jeweiligen Knoten.

Das FE-Modell des in dieser Arbeit betrachteten Getriebes dient somit der Erweiterung der räumlichen Auflösung des Lösungsraums, der bei alleiniger Verwendung der Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse weder geeignet ist, die Bestimmung der optimalen Aktorplatzierung vorzunehmen noch die Simulation der Kopplung von Aktoren und mechanischem System ermöglicht. Hierfür wird ein Modell mit wesentlich höherer räumlicher Auflösung benötigt. Die Untersuchungen sind jedoch auch am FE-Modell nur dann möglich, wenn sichergestellt ist, dass die wesentlichen dynamischen Eigenschaften des realen Systems abgebildet werden. Daher wird im folgenden beschrieben, wie vom ursprünglich zur Verfügung gestellten FE-Modell zum abgeglichenen Modell gelangt wird. In Abb. 33 ist eine grobe Übersicht des Vorgehens dargestellt.

In einem ersten Schritt wird das zur Verfügung gestellte Ausgangsmodell an die geometrischen Gegebenheiten des Prüfstands angepasst. Das so entstehende Referenzmodell dient als Basis für eine Parameterstudie, mit deren Hilfe das Modell an die experimentell ermittelten Eigenschaften des realen Systems angepasst wird. Abschließend wird das finale Modell hinsicht-

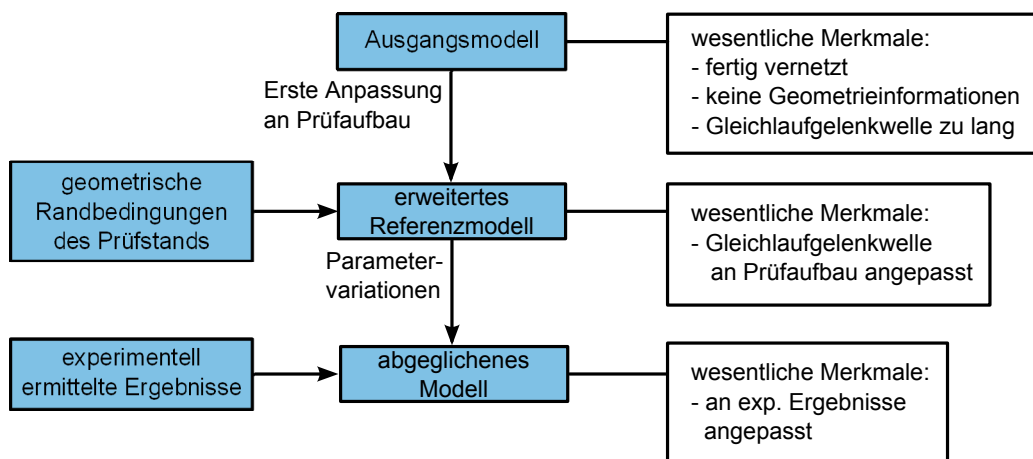


Abbildung 33: Schritte vom Ausgangsmodell zum abgeglichenen FE-Modell. Zunächst werden die geometrischen Randbedingungen einbezogen, anschließend werden die experimentell ermittelten Ergebnisse verwendet.

lich erreichter Übereinstimmung zu den Ergebnissen der experimentellen Modalanalyse und der Abbildung des Phänomens *Getriebeheulen* diskutiert.

3.1 Beschreibung des Ausgangsmodells

Als Ausgangsmodell dient ein fertig vernetztes FE-Modell des Getriebes, das vom Hersteller zur Verfügung gestellt wird. Außer dem eigentlichen Getriebe beinhaltet dieses Modell eine Gleichlaufgelenkwelle, die ähnliche Eigenschaften wie die im Fahrzeug verbaute Kardanwelle hat. Mit dieser Konfiguration ist das Getriebeheulen am Prüfstand reproduzierbar. Bei Durchführung der experimentellen Modalanalyse wird statt dieser Gleichlaufgelenkwelle eine deutlich kürzere verwendet, da die modellierte nicht zur Verfügung steht. Somit ist im Modell die lange durch die vermessene kurze Welle auszutauschen. Im Folgenden wird zunächst die grundlegende Modellierung des eigentlichen Getriebes sowie die Einbausituation am Prüfstand beschrieben. Die Modellierung der Gleichlaufgelenkwelle wird im anschließenden Abschnitt 3.2 behandelt.

Das Getriebeheulen tritt beim untersuchten Getriebe bei eingelegtem 2. Gang auf, weshalb es in diesem Zustand untersucht wird. Die Schnittansicht des Getriebes ist in Abb. 34 dargestellt. Die wesentlichen Bestandteile sind:

- 2 Gehäusehälften
- Wellen (Antriebs-, Vorgelege-, Abtriebswelle)
- Zahnräder
- Schaltungsteile wie Schaltwellen, Schaltschwingen, Synchronisiereinheiten etc.

Für die Modellierung bedeutsame Komponenten sind farblich hervorgehoben. Der Momentübertragungspfad des 2. Gangs ist in rot eingezeichnet. Er verläuft von der Antriebswelle über die

Festverzahnung (FV) auf die Vorgelegewelle, von dort über die Zahnräder des eingelegten 2. Gangs auf die Abtriebswelle und schließlich auf die hier nicht dargestellte Kardanwelle oder Gleichlaufgelenkwelle. Blau sind die verwendeten Festlager, grün die Loslager markiert. Die Gehäuseverschraubung ist orange gekennzeichnet.

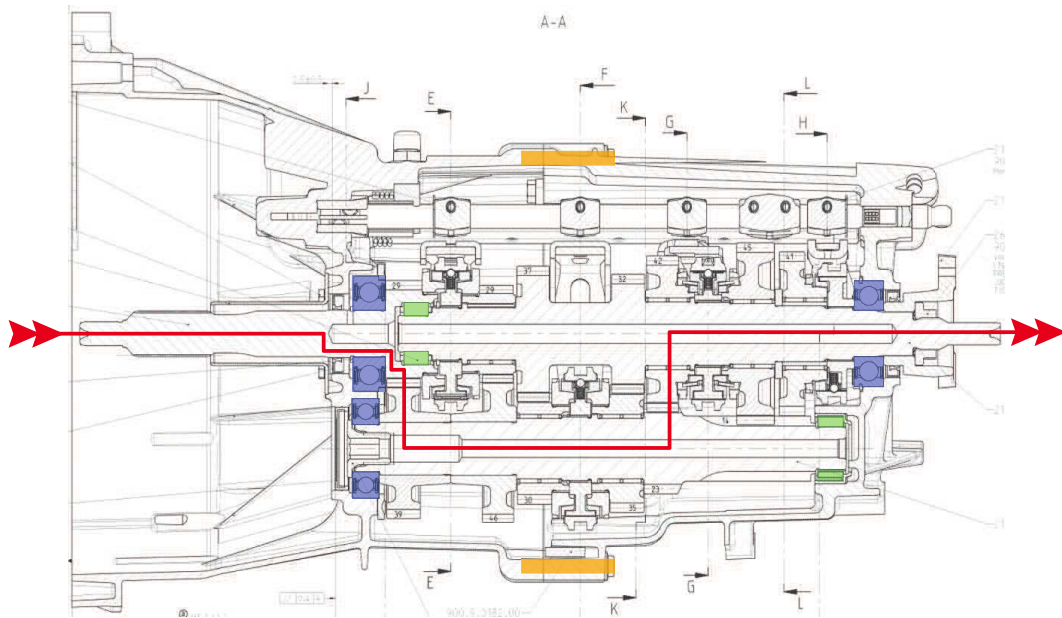


Abbildung 34: Schnittzeichnung des Getriebes mit hervorgehobenen, für die Modellierung besonders relevanten, Merkmalen: In rot ist der Momentübertragungspfad bei eingelegtem 2. Gang gekennzeichnet, Festlager sind blau, Loslager grün markiert. Die Gehäuseverschraubung ist orange angedeutet.

Die im FE-Modell umgesetzte Einbausituation entspricht der am Getriebeprüfstand, an dem auch die experimentelle Modalanalyse durchgeführt wird. Das Getriebe ist hierbei motorseitig an eine Antriebsmaschine geflanscht. Abtriebsseitig kann über die Gleichlaufgelenkwelle ein Lastmoment aufgebracht werden. Der Prüfstands Aufbau ist in Kapitel 2.4 in Abb. 2 dargestellt.

Im FE-Modell wird der Prüfstand nicht modelliert, lediglich das Getriebe und die Gleichlaufgelenkwelle werden abgebildet. Die oben aufgeführten Bauteile sind dabei wie folgt modelliert: Die Gehäusehälften sind durch SOLID187-Volumenelemente, die Getriebewellen und die Gleichlaufgelenkwelle durch BEAM188-Balkenelemente modelliert. Diese BEAM-Elemente berücksichtigen die Timoshenko-Balken-Theorie mit Schubverformungen. Sämtliche Zahnräder und Schalungsteile sind als MASS21-Punktmassen diskretisiert. Die Lagersteifigkeiten der Festlager und des Loslagers der Vorgelegewelle sind über COMBIN14-Federelemente umgesetzt (vgl. Tab. 2).

Die Kopplung zwischen im FE-Modell abgebildeten Bauteilen und dem nicht abgebildeten Prüfstand wird direkt über Einschränkungen der Freiheitsgrade der entsprechenden Knoten realisiert, was der Annahme eines starren Prüfstandes entspricht. Die Kopplung zwischen verschiedenen im FE-Modell abgebildeten Bauteilen erfolgt über die Definition von Zwangsbedingungen

Tabelle 2: Im FE-Modell verwendete Elemente

pysikalisches Bauteil	Elementname	Elementtyp
Gehäusehälften	SOLID187	quadratische Tetraeder
Wellen, Gehäuseverschraubung	BEAM188	Timoshenko-Balken-Elemente
Zahnräder, Schaltungsteile	MASS21	Punktmassen
Lager, Zahneingriffssteifigkeit	COMBIN14	eindimensionales Federelement

mittels CERIG- oder RBE3-Befehlen. Über den CERIG-Befehl werden beliebig viele *Slave*-Knoten starr an einen einzelnen *Master*-Knoten gekoppelt. Oftmals wird hierfür auch der Begriff der Balkenspinne verwendet. Der RBE3-Befehl verteilt eine am *Master*-Knoten wirkende Kraft bzw. ein Moment entsprechend der geometrischen Verhältnisse auf die definierten *Slave*-Knoten [46]. In [47] sind die wesentlichen Unterschiede dieser beiden Realisierungen von Kopplung behandelt.

Die Verschraubung des Getriebegehäuses an die nicht modellierte Antriebsmaschine ist durch Unterdrückung der translatorischen Freiheitsgrade der ersten drei Knotenreihen an den Bohrungsinnenwänden realisiert (vgl. Abb. 35). Die Kopplung zwischen Getriebeantriebswelle und nicht modellierter prüfstandseitiger Abtriebswelle ist über die Unterdrückung der radialen Freiheitsgrade des ersten Knotens der Getriebeantriebswelle umgesetzt. Die Verbindung der Gleichlaufgelenkwelle an die nicht modellierte Lastmaschine ist translatorisch über die Unterdrückung der radialen und axialen Freiheitsgrade und rotatorisch über die Unterdrückung des achsrotatorischen Freiheitsgrades des entsprechenden Knotens auf der Gleichlaufgelenkwelle realisiert.

Die Anbindungen der Masselemente, welche die Schaltungsteile widerspiegeln, an das Getriebegehäuse sind über CERIG-Verknüpfungen realisiert. Die Verschraubung der zwei Gehäusehälften ist über BEAM-Elemente, welche die Schrauben repräsentieren, und CERIG-Befehle dargestellt. Die beiden Endknoten jeder Schraube sind über Balkenspinnen mit den Knoten auf der Bohrungsinnenseite der jeweiligen Gehäusehälfte gekoppelt.

Die Modellierung der beiden im Eingriff befindlichen Verzahnungen (Festverzahnung (FV) und 2. Gang) ist in Abb. 36 dargestellt. Die Wellen sind über BEAM-Elemente modelliert, auf denen die Zahnräder als Massen diskretisiert sind. Die Kontaktpunkte der Zahnräder sind über je ein masseloses MASS-Element in entsprechendem Abstand modelliert. Diese sind über CERIG-Verknüpfungen mit den zugehörigen massebehafteten MASS-Elementen steif gekoppelt.

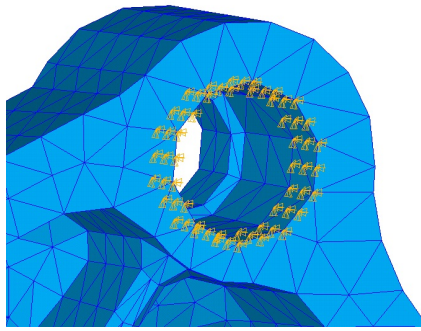


Abbildung 35: Umsetzung der antriebsseitigen Verschraubung im FE-Modell. Gelb sind die gefesselten Freiheitsgrade dargestellt.

Die Verzahnungssteifigkeit ist über ein eindimensionales Feder-Element in Flankennormalenrichtung dargestellt, das die beiden masselosen MASS-Elemente verbindet. Diese masselosen MASS-Elemente besitzen jeweils einen Knoten mit drei kartesischen Freiheitsgraden. Die Freiheitsgrade sind hierbei gegenüber dem globalen Koordinatensystem so gedreht, dass die x-Richtung mit der Zahnflankennormalenrichtung übereinstimmt. Darüber ist das Aufbringen der Verzahnungsanregung ohne weitere Koordinatentransformationen über die Knoten der masselosen MASS-Elemente möglich (vgl. Abschnitt 4.7). Im Modell sind die beiden masselosen MASS-Elemente koinzident, worauf in der Abbildung wegen der daraus resultierenden mangelhaften Darstellbarkeit der Feder verzichtet wird.

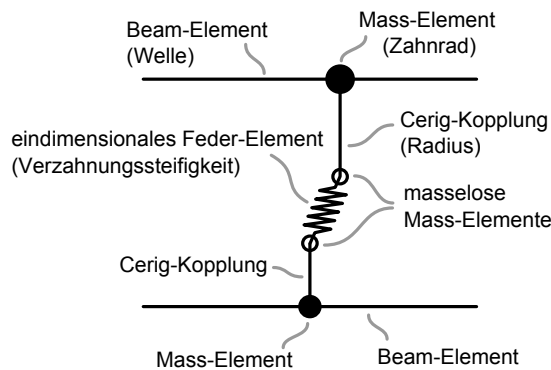


Abbildung 36: Schema zur Modellierung der Verzahnungssteifigkeit.

Ähnlich werden die Lagersteifigkeiten der Wellen modelliert. Den drei Festlagern werden dabei jeweils zwei radiale und eine axiale Steifigkeit zugewiesen, dem Vorgelegewelle-Loslager nur zwei radiale Steifigkeiten. Das Loslager der Abtriebswelle in der Antriebswelle wird allein über CERIG-Verknüpfungen in radialer Richtung dargestellt.

Sämtliche Randbedingungen und Kopplungen sind in den Tabellen 3 und 4 zusammengefasst. Randbedingungen sind hierbei zu verstehen als direkte Einschränkungen von Freiheitsgraden an bestimmten Knoten. Kopplungen entsprechen implementierten Abhängigkeiten von Freiheitsgraden von Knoten verschiedener modellierter Bauteile. Das verwendete Koordinaten-

system ist aus Abb. 37 ersichtlich. Hier ist das FE-Modell des Getriebe-Gehäuses dargestellt, um einen Eindruck bezüglich der geometrischen Detailtreue der Modellierung zu geben. Mit ca. $3 \cdot 10^5$ Elementen, $6 \cdot 10^5$ Knoten und $1,8 \cdot 10^6$ Freiheitsgraden erfüllt bereits das Ausgangs-FE-Modell des untersuchten Getriebes die eingangs formulierte Forderung nach hoher räumlicher Auflösung.

Tabelle 3: Translatorische und rotatorische Randbedingungen.

physikalische Kopplung		Randbedingung an modelliertem Bauteil					
nicht modelliertes Bauteil	modelliertes Bauteil	U_x	U_y	U_z	Rot_x	Rot_y	Rot_z
Antriebsmaschine	Getriebegehäuse	0	0	0	-	-	-
prüfstandseitige Abtriebswelle	Antriebswelle	-	0	0	-	-	-
Lastmaschine	Gleichlaufgelenkwelle	0	0	0	0	-	-

Tabelle 4: Kopplungen zwischen den verschiedenen Bauteilen.

an Kopplung beteiligte Bauteile			
Bauteil 1	Bauteil 2	Bauteil 3	modellierte Kopplung
Gehäusehälfte	Schrauben	Gehäusehälfte	SOLID-CERIG-BEAM-CERIG-SOLID
Welle	Lager	Gehäusehälfte	BEAM-COMBIN-RBE3-SOLID
Antriebswelle	Lager	Abtriebswelle	BEAM-CERIG-BEAM
Zahnrad	Ritzel	-	BEAM-CERIG-MASS-COMBIN-MASS-CERIG-BEAM
Schaltungsteile	Lager	Gehäuse	MASS-RBE3-SOLID

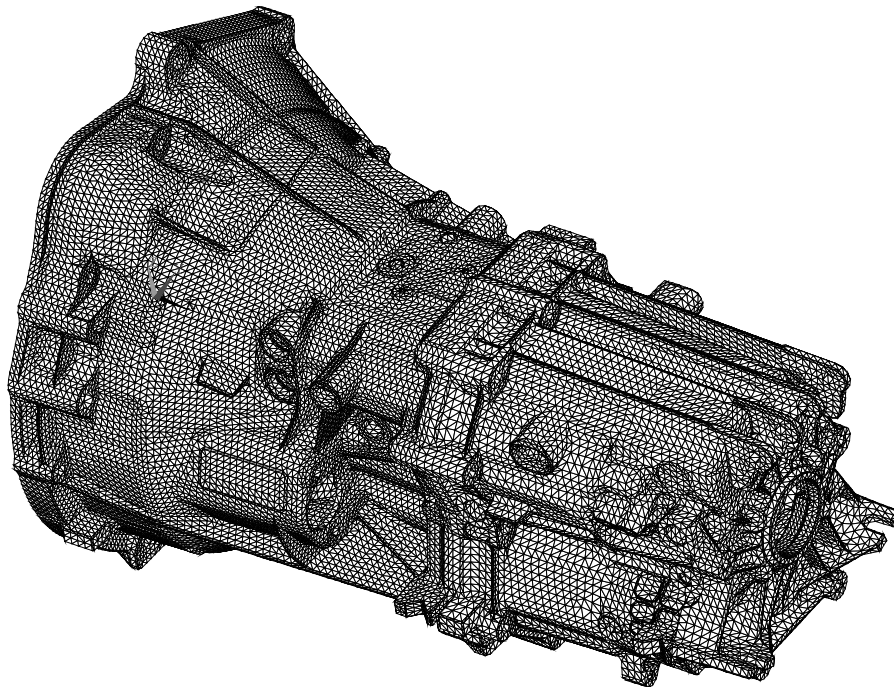


Abbildung 37: FE-Modell des Getriebes-Gehäuses zur Darstellung der geometrischen Detailtreue.

3.2 Beschreibung des Referenzmodells

Das zur Verfügung gestellte Modell wird im ersten Schritt angepasst, um den realen Prüfaufbau treffender abzubilden. Hierunter fällt insbesondere die Modellierung der bei der experimentellen Modalanalyse verwendeten Gleichlaufgelenkwelle sowie die Abbildung der Getriebeanbindung an den Prüfstand. Die grundsätzliche Modellierung der Verschraubung an den Prüfstand wird beibehalten wie im Referenzmodell. Lediglich die Anzahl und Position der Schrauben wird an die tatsächlichen Verhältnisse angepasst. Dadurch wird der Dynamikeinfluss des Prüfstandes vernachlässigt. Die Folgen dieser Modellierung werden im folgenden Abschnitt diskutiert.

Eine Skizze der Gleichlaufgelenkwelle ist in Abb. 38 dargestellt. Diese ist symmetrisch aufgebaut und wird mit einem Flansch über einen Adapter an die Getriebeausgangswelle gekoppelt. Der Mittelteil besteht aus einer einfachen Hohlwelle. Die Gelenke sind rotationssteif um die x-Achse, jedoch biegeweich um die y- und z-Achsen. Translatorisch ist die Hohlwelle in x-Richtung frei beweglich, in den Gelenken ist die in radialer Richtung starre Kopplung rot dargestellt. Die Anbindung an die Lastmaschine ist (in der Darstellung rechts) über die in Tabelle 3 aufgeführten Randbedingungen des äußersten modellierten Knotens abgebildet. Die gesamte Gleichlaufgelenkwelle ist mittels BEAM-Elemente modelliert, welche über die Element-Länge, den Element-Querschnitt sowie die Materialdaten definiert werden.

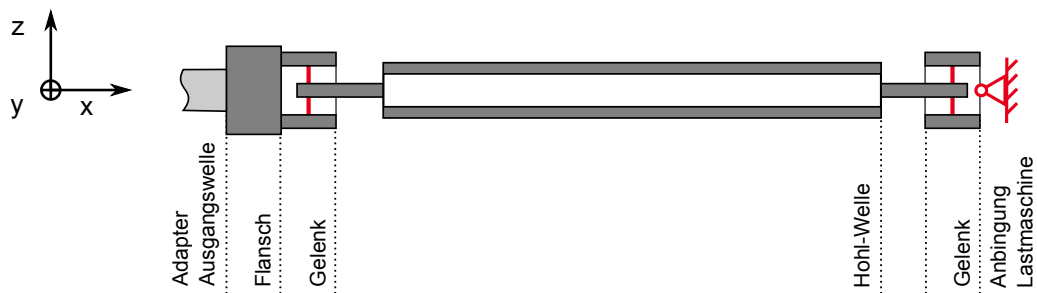


Abbildung 38: Schematische Modellierung der Gleichlaufgelenkwelle: Rot dargestellt sind die radialen Kopplungen in den Gelenken sowie der translatorisch und rotatorisch um x an die Lastmaschine gefesselte äußerste Knoten.

3.3 Vereinfachende Annahmen bei der Modellerstellung

Im FE-Modell werden einige Vereinfachungen getroffen, die sich auf die Ergebnisse der numerischen Modalanalyse auswirken. Sie lassen sich grob in die drei folgenden Kategorien einteilen:

- geometrische Vereinfachungen,
- vereinfachte Kopplungen und
- vereinfachte Randbedingungen.

Die geometrischen Vereinfachungen betreffen insbesondere die durch Punktmassen realisierte Modellierung der Zahnräder und Schaltungsteile. Hierdurch werden die lokalen Eigenformen dieser Bauteile nicht dargestellt, wodurch im FE-Modell weniger Eigenfrequenzen auftreten als tatsächlich vorhanden sind. Die Modellierung als Punktmassen führt des weiteren aufgrund der verfälschten Massen- und Steifigkeits-Verteilung zu leicht abweichenden Eigenfrequenzen und -vektoren. Der wesentliche Einfluss dieser Vereinfachung kommt jedoch vor allem bei Eigenformen zum Tragen, die lokal von diesen Bauteilen dominiert werden. Diese wiederum kommen als Ursache für das hier untersuchte Getriebeheulen nicht in Betracht. Eine detaillierte Modellierung dieser Bauteile würde somit lediglich in einem größeren Modell und damit unerwünscht steigendem Rechenaufwand resultieren.

Die Kopplung der einzelnen Bauteile untereinander mittels CERIG und RBE3 oder diskreter Steifigkeiten spiegelt eine weitere Unsicherheit im Modell wider. CERIG-Verbindungen bilden Kopplungen oftmals steifer, RBE3-Verbindungen hingegen eher weicher ab, als es den realen Verhältnissen entspräche. Dass die korrekte Modellierung von Kontakten ein komplexer Bereich der FE-Anwendung ist, ist eine allgemein bekannte Tatsache, die sich auch in der umfangreichen Software-Dokumentation zu diesem Thema [48, 49] zeigt. Die Abbildung der Lager durch diskrete Steifigkeiten vernachlässigt die Tatsache, dass diese häufig von Betriebsbedingungen abhängen und selten ideal isotrop sind. Da im betrachteten Fall jedoch ein Phänomen unter-

sucht wird, das ohnehin nur in einem stark eingeschränkten Betriebsbereich auftritt, ist diese Vereinfachung legitim.

Schließlich führt die Vernachlässigung des dynamischen Verhaltens des Prüfstandes im Modell zu weiteren Abweichungen. Zum einen kommt dies ebenfalls einer oft verwendeten geometrischen Vereinfachungen gleich, zum anderen resultieren hieraus auch die vereinfachten Randbedingungen. Die modellierten Kopplungen des Getriebes und der Gleichlaufgelenkwelle an den Prüfstand über Einschränkung der entsprechenden Freiheitsgrade entspricht einer konstanten Nachgiebigkeit über den gesamten Frequenzbereich. Eine reale Anbindung zwischen zwei Bauteilen weist im Gegensatz dazu stets eine dynamische, bezüglich der Frequenz variable Nachgiebigkeit auf. Idealerweise müsste hier für jede Anbindung an den Prüfstand die diesem Knoten entsprechende Übertragungsfunktion

$$H_{nm}(\omega_j) = \frac{F(\omega_j)}{x(\omega_j)}, \text{ mit } n = m \quad (19)$$

hinterlegt werden. Diese sind jedoch weder bekannt, noch existiert die Möglichkeit, sie im FE-Modell umzusetzen. Dadurch kommt es in den numerisch ermittelten Eigenfrequenzen sowohl zu Abweichungen nach oben als auch nach unten, je nachdem, ob die dynamische Nachgiebigkeit im entsprechenden Frequenzbereich über- oder unterschätzt wird. Diese Vereinfachung hat neben den vereinfachten Kopplungen den größten Einfluss auf die Ergebnisse, und die Auswirkungen sind schwer vorhersagbar. Eine detailliertere Modellierung des Prüfstandes stellt jedoch keine empfehlenswerte Alternative dar. Einerseits würden die Unsicherheiten im Modell aufgrund der weiteren modellierten komplexen Bauteile weiter steigen, andererseits würde eine gravierend höhere Modellordnung folgen. Aus diesem Grund wird die Anbindung des Prüfstands als Systemgrenze im FE-Modell gewählt.

Unter dem allgemeinen Aspekt, das Modell so groß wie nötig und so klein wie möglich zu gestalten, sind die hier getroffenen Vereinfachungen unter Abwägung des Kosten-Nutzen-Verhältnisses angebracht. Der später durchgeführte Vergleich zwischen abgeglichenem Modell und experimentellen Ergebnissen zeigt einige Konsequenzen der hier beschriebenen Vereinfachungen.

3.4 Numerische Modalanalyse des Referenzmodells

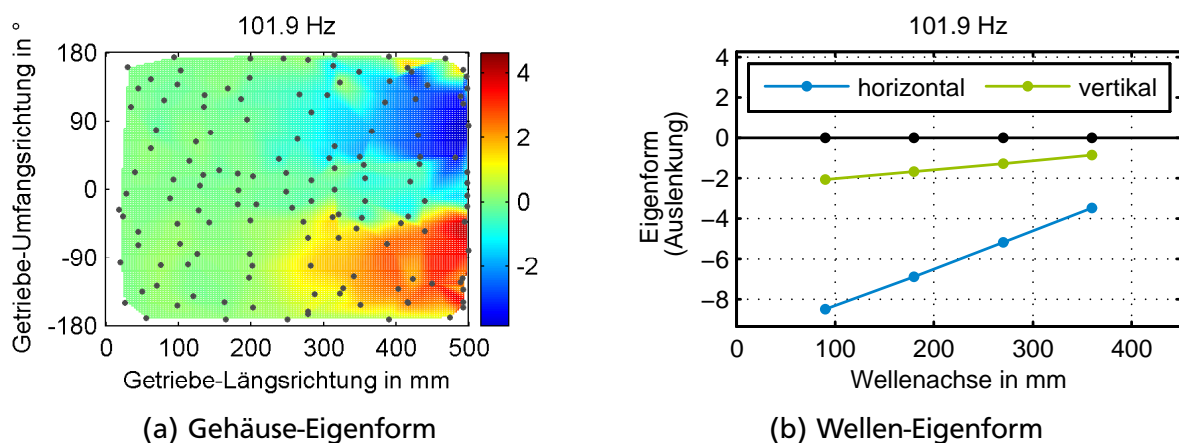
Für das beschriebene Referenzmodell wird Gl. (18) gelöst, woraus die in Tabelle 5 aufgelisteten Eigenfrequenzen folgen. Bei den ersten drei Eigenformen bei 0 Hz handelt es sich um Starrkörper-Eigenformen von Teilen der Gleichlaufgelenkwelle; die Hohlwelle bewegt sich axial aufgrund der fehlenden Kopplung in dieser Richtung. Der Gelenk-Außenring auf der Seite der Lastmaschine rotiert um die y- und die z-Achse. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden die Starrkörper-Eigenformen vernachlässigt, da sie für das reale System nicht relevant sind.

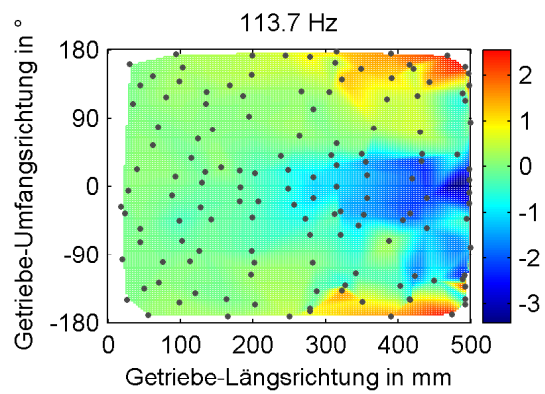
Tabelle 5: Numerisch ermittelte Eigenfrequenzen des Referenzmodells bis 1000 Hz.

Nummer	1	2	3	4	5	6	7
Frequenz (in Hz)	0	0	0	101,9	113,7	213,4	229,6
Nummer	8	9	10	11	12	13	14
Frequenz (in Hz)	236,7	379,6	420,4	472,3	472,6	534,0	608,3
Nummer	15	16	17	18	19	20	21
Frequenz (in Hz)	634,5	681,8	756,0	802,1	858,3	952,3	988,1

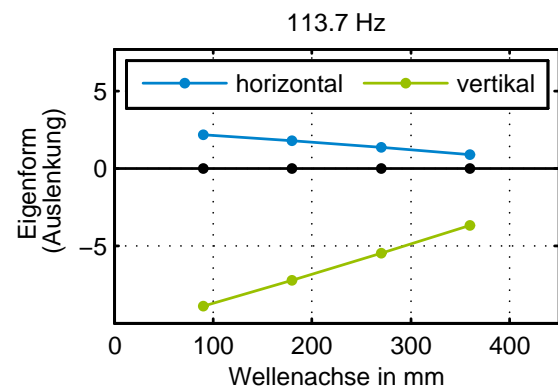
Einige elastische Eigenformen sind beispielhaft in den Abb. 39 bis 41 dargestellt. Wie schon für die Darstellung der Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse wird auch hier die Zylinderprojektion verwendet, um den direkten Vergleich zu vereinfachen. Hierfür werden aus den Eigenvektoreinträgen der jeweils drei Freiheitsgrade eines jeden FE-Modell-Knotens, der einer Messposition in der experimentellen Modalanalyse entspricht, der Anteil in Oberflächennormalenrichtung berechnet. Diese bilden wieder die Basis für die dargestellte Interpolation über die gezeigte Rechteckfläche.

Die erste elastische Eigenform weist antriebsseitig bei 0 mm entsprechend der modellierten Randbedingungen im Gegensatz zur ersten experimentell ermittelten Eigenform keine Auslenkung aus. Ansonsten sind prinzipiell die gleichen Muster wie bei den experimentell ermittelten Eigenformen erkennbar; die Gehäuseauslenkungen treten vorwiegend in horizontaler, vertikaler oder diagonaler Richtung auf. Größere Unterschiede liegen in den Werten der Eigenfrequenzen, sowie insbesondere in der Anzahl der identifizierten modalen Parameter.

**Abbildung 39:** Vierte numerisch ermittelte Eigenform.

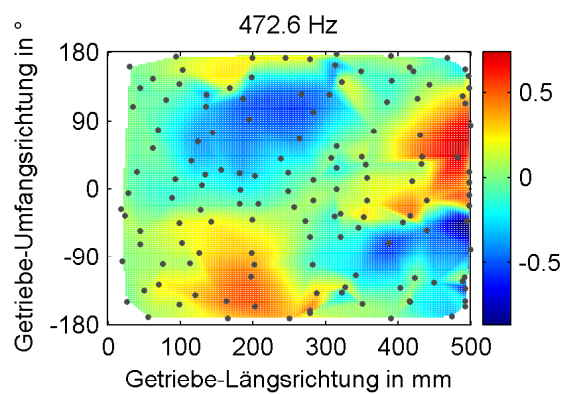


(a) Gehäuse-Eigenform

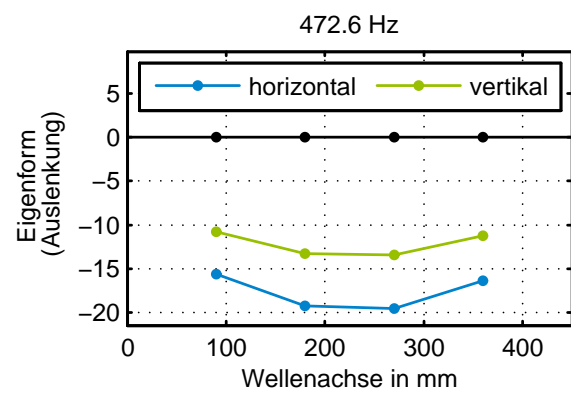


(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 40: Fünfte numerisch ermittelte Eigenform.



(a) Gehäuse-Eigenform



(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 41: Zwölfte numerisch ermittelte Eigenform.

3.5 Grundlagen des Modellabgleichs

Das Referenzmodell dient als Ausgangspunkt für einen Modellabgleich mit dessen Hilfe eine bessere Übereinstimmung der numerisch erzielbaren Ergebnisse mit den experimentell ermittelten Ergebnissen erreicht wird. Methoden zum Abgleich von FE-Modellen an experimentell ermittelte Daten sind bspw. in [50, 51, 52] dokumentiert. Eine der etablierten Methoden ist eine iterative auf die Sensitivität gestützte Methode [53]: Der Einfluss verschiedener Parameter Φ auf die anzupassenden numerisch ermittelten Eigenfrequenzen oder -vektoren wird mittels der Sensitivitätsmatrizen \mathbf{G}_ω und \mathbf{G}_ψ abgeschätzt:

$$\mathbf{G}_\omega = \left[\frac{\partial \omega_l}{\partial \Phi_{pz}} \right]_{\Phi=\Phi_{\text{ref}}}, \quad \mathbf{G}_\psi = \left[\frac{\partial \psi_l}{\partial \Phi_{pz}} \right]_{\Phi=\Phi_{\text{ref}}} \quad \text{mit } pz = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Hierzu werden die Parameter über pz verschiedene Werte variiert. Diese Matrizen können sowohl analytisch über die Massen- und Steifigkeitsmatrizen, als auch numerisch über die Auswertung leicht veränderter FE-Modelle abgeleitet werden. Eine detaillierte Beschreibung findet sich beispielsweise in [53]. Ausgangspunkt ist stets ein Referenzmodell mit den Parameterwerten Φ_{ref} . Die angepassten modalen Werte ergeben sich für jeden neuen Iterationsschritt zu

$$\omega_{l,\text{angepasst}} = \omega_{l,\text{ref}} + \mathbf{G}_\omega \cdot (\Phi_{pz,\text{ref}} + \Delta\Phi_{pz}) \quad \text{bzw.} \quad (21)$$

$$\psi_{l,\text{angepasst}} = \psi_{l,\text{ref}} + \mathbf{G}_\psi \cdot (\Phi_{pz,\text{ref}} + \Delta\Phi_{pz}). \quad (22)$$

Dabei wird Gl. (20) für jeden Iterationsschritt neu berechnet und die Parameterreferenzwerte entsprechend des vorigen Iterationsschrittes angepasst. Dies wird so oft wiederholt, bis der Unterschied zwischen experimentell und numerisch erzielten Ergebnissen kleiner als vom Anwender gefordert ist. Die generellen Herausforderungen des Abgleichs des untersuchten Getriebemodells resultieren vor allem aus

- der Größe des FE-Modells,
- den vielen Parameter-Variationen und
- den mit Unsicherheit behafteten experimentell ermittelten Ergebnissen.

Aus der experimentellen Modalanalyse resultiert ein Modell mit ca. 150 Freiheitsgraden. Dem gegenüber steht das numerische Modell mit ca. 1,8 Millionen Freiheitsgraden und damit auch Eigenvektoren, Massen- und Steifigkeitsmatrizen entsprechender Dimensionen. Dieser enorme Unterschied vereitelt den Einsatz verschiedener gebräuchlicher Algorithmen zum Modellabgleich, da diese häufig eine identische oder zumindest ähnliche Modellgröße (Anzahl an Freiheitsgraden) voraussetzen [51]. Die Berechnung der Sensitivitätsmatrix \mathbf{G} ist dagegen prinzipiell möglich, jedoch aufgrund der Modellgröße mit erheblichem Aufwand verbunden.

Die große Anzahl an Parametern, die potentiell Einfluss auf das Systemverhalten haben, ist unter anderem der Komplexität des Systems geschuldet. Hierunter fallen insbesondere die bereits im vorigen Kapitel diskutierten Steifigkeiten der verschiedenen Bauteilverbindungen wie Lager, Gehäuseverschraubung und Prüfstandsanbindungen. Außerdem sind geometrische Unsicherheiten insbesondere bei der Gleichlaufgelenkwelle vorhanden. Hinzu kommen geringe Unsicherheiten bezüglich der Materialparameter. Diese bewegen sich jedoch in einem festen physikalisch sinnvollen Rahmen und sind somit leichter zu handhaben.

Schließlich bleibt eine Restunsicherheit bezüglich der experimentell ermittelten Ergebnisse, und damit der Bezugsdaten, bestehen. Wie bereits in Abschnitt 2.6 diskutiert, reagieren einige der experimentell ermittelten Eigenformen sensitiv auf leichte Änderungen der ausgewählten Eigenfrequenzen und Dämpfungswerte. Dennoch werden die so ermittelten Eigenformen als Bezugsgrößen für den folgenden Modellabgleich herangezogen, da die dominanten Eigenformen diese Sensitivität nicht aufweisen.

3.6 Zuordnung der experimentellen zu den numerischen Ergebnissen

Um zu bestimmen, welche Änderungen im Referenzmodell nötig sind, muss zunächst eine Zuordnung der experimentell ermittelten zu den numerisch ermittelten Eigenformen und -frequenzen geschehen. Die Berechnung der MAC-Werte nach Gl. (17) ist hierfür ein klassischer Ansatz [54, 55]. Das Ergebnis ist in Abb. 42 dargestellt. Je näher die MAC-Werte an 1 sind, desto dunkler sind die entsprechenden Rechtecke und desto ähnlicher sind die betrachteten Eigenformen.

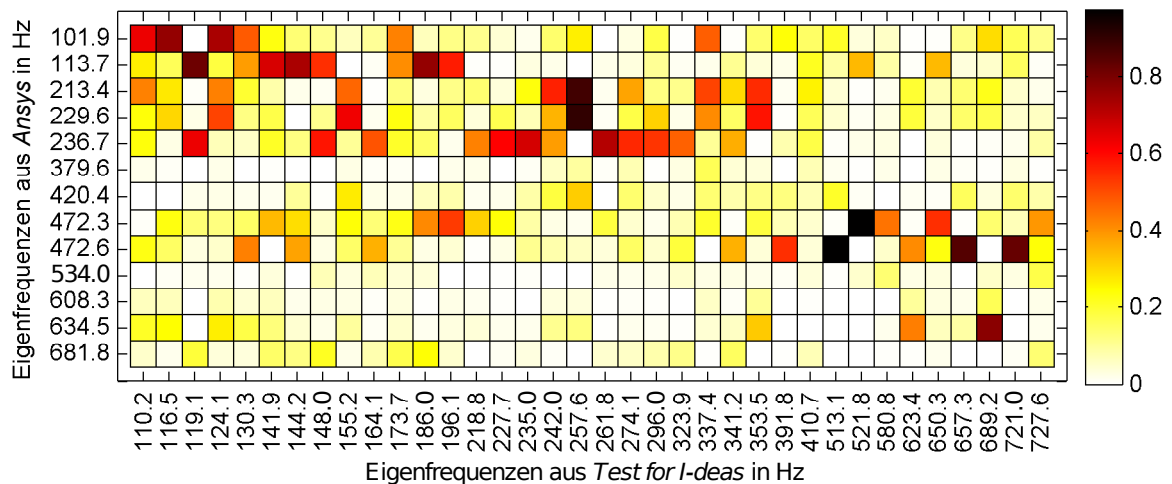


Abbildung 42: MAC-Matrix der experimentell und numerisch aus dem Referenzmodell ermittelten Ergebnisse bei Berücksichtigung aller Messpositionen. Je höher die MAC-Werte, desto dunkler die Rechtecke, desto größer die Ähnlichkeit der entsprechenden Eigenformen.

Aus der Abbildung geht hervor, dass experimentell wesentlich mehr Eigenfrequenzen identifiziert werden, als im FE-Modell abgebildet werden. Hiervon sind nur wenige eindeutig den

numerisch ermittelten Eigenformen zuordenbar. Zum einen liegt dies an den bereits im Kapitel 3.3 ausgeführten Schwachstellen der FE-Modellierung. Zum anderen sind auch die experimentell ermittelte Bezugs-Eigenformen aufgrund der in Kapitel 2.6.2 diskutierten schwierigen Messauswertung mit Unsicherheiten behaftet.

Im niederfrequenten Bereich kommt insbesondere die Nicht-Modellierung des Prüfstandes zum Tragen. Dadurch sind hier wesentlich mehr experimentell ermittelte Eigenfrequenzen vorhanden als aus dem FE-Modell hervorgehen. Im mittleren Frequenzbereich von ca. 250 Hz bis 450 Hz existieren im FE-Modell keine Eigenfrequenzen, die den experimentell ermittelten entsprechen. Ursachen sind hier vor allem die im vorigen Kapitel diskutierten Schwierigkeiten bei der Messauswertung in diesem Bereich. Im oberen Frequenzbereich von 450 Hz bis 800 Hz ist sowohl die FE-Modellierung als auch die Messauswertung fehlerbehaftet, weshalb nur die Zuordnung von dominanten Eigenformen möglich ist.

In Abb. 43 ist die MAC-Matrix der zugeordneten Eigenformen dargestellt. Zur Auswahl führen neben den hohen MAC-Werten auch die Eigenfrequenzen. So sind beispielsweise in Abb. 42 die MAC-Werte aus der ersten numerisch ermittelten Eigenform und der dargestellten zweiten experimentell ermittelten Eigenform bei 116,5 Hz sowie der MAC-Wert aus der ersten numerisch ermittelten Eigenform und der vierten experimentell ermittelten Eigenform bei 124,1 Hz sehr ähnlich. Dies ist durchaus plausibel, da die beiden experimentell ermittelten Eigenformen nahezu identisch sind (vgl. Abb. 25 und 92). Die vierte experimentell ermittelte Eigenform weist dabei einen geringeren Frequenzabstand zur gemessenen Frequenz auf, was zur Auswahl dieser für den weiteren Modellabgleich führt.

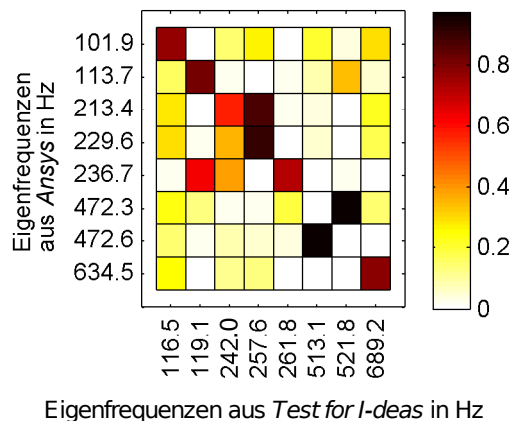


Abbildung 43: MAC-Matrix der für den Modellabgleich ausgewählten experimentellen und numerischen Eigenformen bei Berücksichtigung aller Messpositionen.

Ebenso verhält es sich mit den numerisch ermittelten Eigenformen bei 213,4 Hz und 229,6 Hz. Sie sind auch sehr ähnlich, womit eine eindeutige Zuordnung zu einer experimentell ermittelten nicht möglich ist. Der MAC-Wert der höherfrequenten Eigenform ist jedoch etwas

größer, weshalb diese als direktes Pendant gewählt wird und für die niedrigere die experimentell ermittelte Eigenform bei 242 Hz ausgewählt wird.

3.7 Parameterstudie

Mit dem Wissen um diese Zuordnung wird ein Modellabgleich, angelehnt an die in Gl. (20) und (22) beschriebene sensitivitätsbasierte Methode, mittels gezielter Parameteranpassung durchgeführt. Hierfür wird eine Parameterstudie durchgeführt, um den Einfluss

- des Elastizitäts-Moduls des Gehäuse-Materials,
- des Durchmessers der Gleichlaufgelenkwelle,
- der Länge des Adapters an der Ausgangswelle,
- der Verzahnungssteifigkeit und
- der Lagersteifigkeiten des Gehäuses

auf das Systemverhalten abzuschätzen. Die Auswahl erfolgt unter Zuhilfenahme der numerischen Ergebnisse des Referenzmodells und begründet sich folgendermaßen:

Das Gehäuse besteht aus Aluminium-Druckguss. Je nach Legierung weist dieser E-Moduln zwischen 65 GPa und 85 GPa auf [56]. Da das Gehäuse über einen breiten Frequenzbereich an den Eigenformen beteiligt ist, wird auch der **E-Modul** über einen breiten Bereich Auswirkungen zeigen.

Der **Durchmesser der Gleichlaufgelenkwelle** wird im Datenblatt mit 60 mm angegeben. Die am Prüfstand verbaute Welle hat jedoch einen kleineren Durchmesser. Der maßgebliche Einfluss dieses Parameters auf Eigenfrequenzen und -formen, die von der Wellenbiegung dominiert werden, führt zur Auswahl dieses Parameters. Auch die Wandstärke der Welle ist unbekannt. Da jedoch sowohl größere Wandstärken als auch größere Außendurchmesser zu steigenden Flächen- und Trägheitsmomentens führen, wird eine eventuell inkorrekt modellierte Wandstärke über den Außendurchmesser kompensiert.

Die **Länge des konischen Adapters** zwischen Ausgangswelle und Gleichlaufgelenkwelle entspricht in der Modellierung im Referenzmodell ebenfalls nicht der am Prüfstand, weshalb sie in der Parameterstudie variiert wird.

Die **Verzahnungssteifigkeit** hat laut Getriebehersteller wesentlichen Einfluss auf das Phänomen *Getriebeheulen*. Um diesen Einfluss abzuschätzen, wird der Parameter variiert.

Die Werte der **Steifigkeiten der Lager** im Gehäuse stammen ursprünglich aus den entsprechenden Datenblättern. Aufgrund der durch das statische Moment aufgeprägten Vorspannung liegt tatsächlich eine höhere Lagersteifigkeit vor. In einer vom Getriebehersteller durchgeführten Vorabuntersuchung wurden die Datenblatt-Werte daher um den Faktor 100 erhöht. Zur Plausibilisierung dieses Vorgehens werden die Lagersteifigkeiten über diesen gesamten Bereich variiert.

Weitere Parameter werden nicht variiert. Die Anbindung an den Prüfstand beispielsweise wird nicht betrachtet, da aufgrund der in Abschnitt 3.3 diskutierten dynamischen Steifigkeit ohnehin nur in einem begrenzten Frequenzbereich physikalisch sinnvolle Annahmen möglich wären. Ebenso wenig werden Parameter der Getriebe-Innen-Bauteile variiert. Dort sind keine Grenzwerte bekannt, womit eine Variation zufällig durchgeführt werden müsste, was nicht zielführend ist. Die Dichte des Gehäusematerials wird nicht variiert, da die modellierte Masse des Gehäuses sehr gut mit der realen Masse übereinstimmt.

Ausgehend vom Referenzmodell werden die fünf Parameter separat variiert. Die Bereiche, in denen die Parameter geändert werden, sind in Tabelle 6 angegeben. Die ersten vier sind jeweils Einzelwerte, die Gehäuse-Lagersteifigkeiten hingegen werden gemeinsam betrachtet. Grund ist die Annahme, dass sich der Einfluss der Vorspannung ähnlich auf alle Lagersteifigkeiten auswirken wird. Das Verhältnis der Steifigkeiten untereinander bleibt daher über den gesamten Parameterbereich nahezu gleich.

Tabelle 6: Bereiche, über die die Werte bei der Parameterstudie variiert werden.

		Startwert	Endwert
	E-Modul Gehäuse	70000 N/mm ²	90000 N/mm ²
	Durchmesser Gleichlaufgelenkwelle	27,5 mm	30 mm
	Länge Adapter Ausgangswelle	10 mm	60 mm
	Verzahnungssteifigkeit	4000 N/mm	270000 N/mm
Gehäuse-Lagersteifigkeit	Eingangswelle radial	117851 N/mm	11785100 N/mm
	Eingangswelle axial	88235 N/mm	8823500 N/mm
	Ausgangswelle radial	130108 N/mm	13010800 N/mm
	Ausgangswelle axial	104000 N/mm	10400000 N/mm
	Vorgelegewelle radial (eingangsseitig)	122565 N/mm	12256500 N/mm
	Vorgelegewelle axial (eingangsseitig)	47270 N/mm	4727000 N/mm
	Vorgelegewelle radial (ausgangsseitig)	400694 N/mm	40069400 N/mm

In Abb. 44 sind die Ergebnisse der Parameterstudie dargestellt, wobei zunächst nur die Eigenfrequenzen betrachtet werden. Die Eigenformen werden später diskutiert.

Auf der Ordinate sind die Parameterwerte in % angegeben. Die 100 % entsprechen dabei jeweils dem im Referenzmodell verwendeten Wert. Auf der Abszisse sind die berechneten Eigenfrequenzen dargestellt. Zur Orientierung sind die Eigenfrequenzen des Referenzmodells als senkrechte Linien eingetragen. Verbunden sind die Eigenfrequenzen aufeinander folgender Berechnungen, wenn sie in einem ähnlichen Frequenzbereich liegen und die zugehörigen MAC-Werte (vgl. Gl. (16)) den Grenzwert 0,7 überschreiten. Je dicker die Verbindungslinien sind,

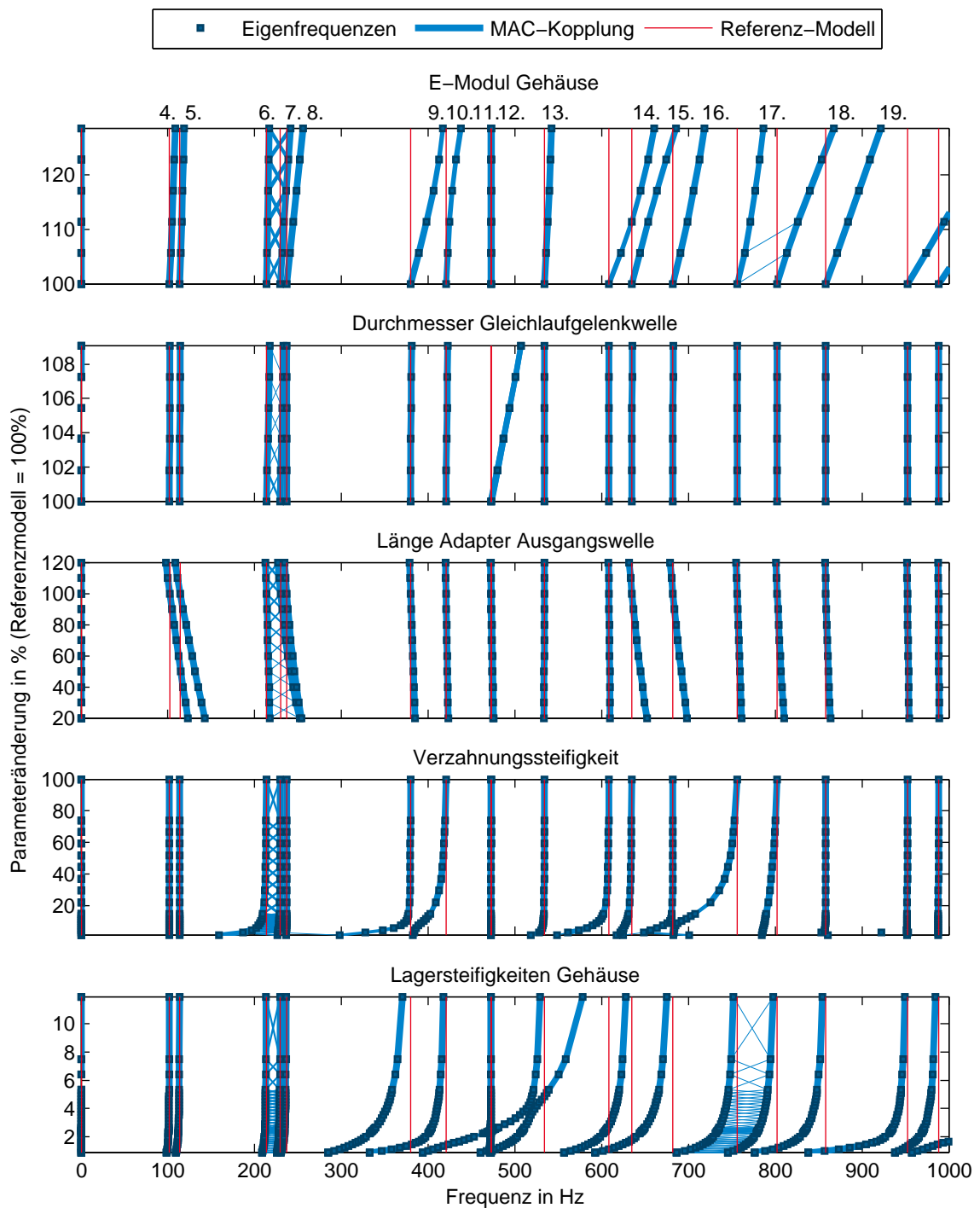


Abbildung 44: Einfluss verschiedener Parameter auf die Eigenfrequenzen des FE-Modells. Jeweils ein Parameter wird separat variiert. Senkrechte Linien markieren die Eigenfrequenzen des numerischen Referenzmodells, dessen Parameter jeweils der 100% Marke entsprechen.

desto größer sind die jeweiligen MAC-Werte und somit ähnlicher die jeweiligen Eigenformen. Diese Verbindungslinien ermöglichen somit die Nachverfolgung unveränderlicher oder sich kon-

tinuierlich ändernder Eigenformen durch den Parameterraum. Sie liefern jedoch noch keine Aussage bezüglich Übereinstimmungen mit den experimentell ermittelten Eigenformen.

Im ersten Diagramm sind die nummerierten Eigenfrequenzen in Abhängigkeit des Gehäuse E-Moduls aufgetragen. Lediglich die 11. und 12. Eigenfrequenz bei ca. 470 Hz (doppelte Eigenfrequenz), bleiben nahezu konstant. Diese sind dominiert durch die Biegungen der Gleichlaufgelenkwelle. Für die übrigen Eigenfrequenzen wird die Steifigkeit maßgeblich vom E-Modul beeinflusst. Sie ändern sich desto stärker, je höher sie im Frequenzbereich liegen.

Der zunehmende Durchmesser der Gleichlaufgelenkwelle im zweiten Diagramm wirkt hingegen allein auf die Biege-Eigenformen der Welle. Alle übrigen Eigenfrequenzen bleiben konstant. Der zunehmende Durchmesser führt zu einem höheren Flächenträgheitsmoment und somit höherer Steifigkeit.

Die Länge des Adapters zwischen Ausgangswelle und Gleichlaufgelenkwelle wird im dritten Diagramm variiert und hat insbesondere Einfluss auf die 4. bis 8. Eigenfrequenz unter 300 Hz sowie auf die 15. und 16. zwischen 600 und 700 Hz. Die zunehmende Länge führt zu abnehmender Steifigkeit und damit einem Absenken der Eigenfrequenzen.

Die im vierten Diagramm behandelte Verzahnungssteifigkeit wird über einen sehr großen Bereich variiert, da sie laut Getriebe-Hersteller wesentlichen Einfluss auf das Phänomen *Getriebeheulen* hat. Sie ist im lastfreien Fall verschwindend gering und steigt abhängig vom statischen Vorspannmoment an. Für den Lastpunkt, in dem das Getriebeheulen im Fahrzeug auftritt, nimmt sie den Wert 270.000 N/mm an. Dieser Wert ist experimentell vom Getriebe-Hersteller ermittelt. Aus den Ergebnissen wird klar, dass der Einfluss zunächst sehr groß ist, die Eigenfrequenzen sich mit zunehmender Steifigkeit jedoch einem Grenzwert nähern. Die Eigenfrequenz, die am sensitivsten auf die Verzahnungssteifigkeit reagiert, ist der Referenz-Eigenfrequenz bei 760 Hz zugeordnet. Diese, kombiniert mit der darunter liegenden Eigenfrequenz bei ca. 700 Hz, ist bemerkenswert, ebenso wie das Eigenfrequenz-Paar um 400 Hz. Was auf den ersten Blick wie ein Frequenz-Kreuzen aussieht, erweist sich bei näherer Betrachtung eher als ein Effekt, der in der englischen Literatur als *mode veering* bezeichnet wird [57, 58]. Bei beiden Eigenfrequenz-Paaren hat die Verzahnungssteifigkeit zunächst größeren Einfluss auf die jeweils niedrigere Eigenfrequenz. Wenn diese sich dem Frequenzwert der höheren Eigenfrequenz annähert, verliert der Parameter zunehmend an Einfluss. Statt dessen ändert sich nun die höhere Eigenfrequenz stärker.

Im fünften Diagramm zeigt sich zunächst ein deutlicher Einfluss der Gehäuse-Lagersteifigkeiten auf einen breiten Frequenzbereich. Dieser lässt jedoch bereits beim Erreichen von ca. 7% der Referenzwerte deutlich nach. Die Eigenfrequenzen ändern sich ab diesem Wert nur noch minimal, weshalb auf die Darstellung des gesamten Parameterbereiches verzichtet wird. Allein die 13. Eigenfrequenz bei dann 580 Hz wird auch in diesem Parameterbereich noch nachhaltig beeinflusst. Diese ist aus dem selben Grund bemerkenswert wie die zwei Eigenfrequenz-Paare im vierten Diagramm. In Abb. 45 ist eine detaillierter Betrachtung des Übergangsbereiches gezeigt.

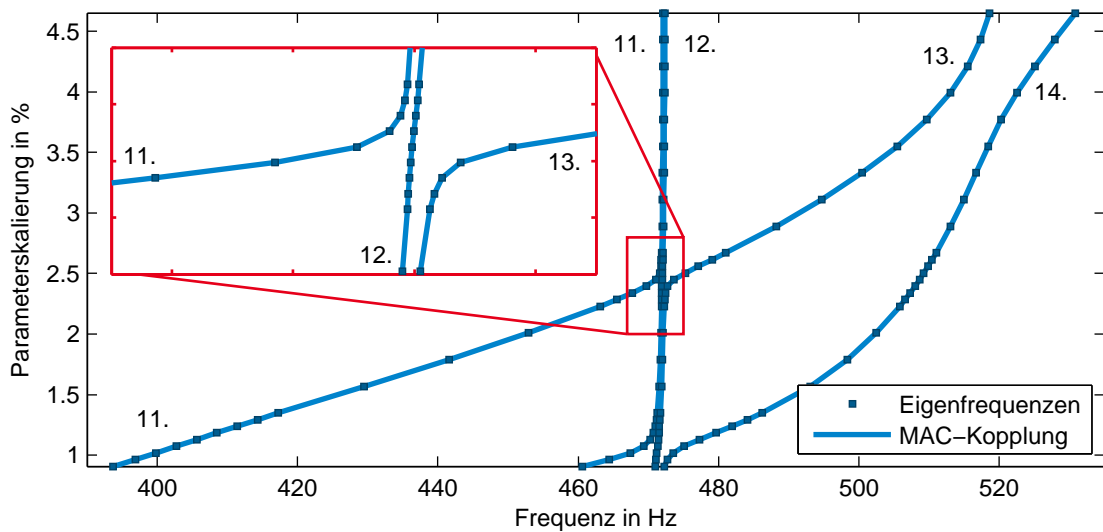


Abbildung 45: Übergangsbereich beim *mode veering*; mit zunehmenden Lagersteifigkeiten lösen sich manche Eigenfrequenzen gegenseitig ab.

Die 11. Eigenfrequenz liegt zu Beginn der Parametervariation bei ca. 390 Hz. Mit zunehmenden Lagersteifigkeiten nähert sie sich der 12. Eigenfrequenz bei knapp 472 Hz an und löst diese ab. Die 12. Eigenfrequenz wird im Übergangsbereich kurz beeinflusst, nähert sich dem ursprünglichen Wert der 13. an und löst diese ab. Die 13. Eigenfrequenz reagiert ab dem Übergangsbereich sehr sensitiv auf eine Erhöhung der Lagersteifigkeiten und steigt deutlich an, bis sie sich bei ca. 520 Hz wiederum der nächst höheren (14.) Eigenfrequenz annähert und diese ablöst.

In Abb. 46 werden die Änderungen der MAC-Werte für ausschließlich die Eigenformen, welche den experimentell ermittelten zugeordnet werden, über den Parametervariationen dargestellt; hier zeigt sich, dass Frequenzänderungen nahezu unabhängig von Eigenformänderungen sind. Lediglich unter zwei Bedingungen wird auch die Eigenform von Parameteränderungen beeinflusst: Zum einen, wenn mit der Parameteränderung eine Geometrieänderung und damit Massen- bzw. Steifigkeits-Umverteilung einhergeht. Dies ist der Fall im zweiten Diagramm bei Änderung des Durchmessers der Gleichlaufgelenkwelle für die 11. und 12.-Eigenform. Zum anderen tritt eine Änderung auf, wenn sich eine Eigenfrequenz einer anderen annähert und in den Bereich des *mode veerings* kommt. Dies ist bei Variation des E-Moduls abgeschwächt der Fall für die 14. und 15.-Eigenform, ebenso bei Zunahme der Gehäuse-Lagersteifigkeiten, wesentlich stärker ausgeprägt, für die 11. bis 13.-Eigenformen. Zur Verdeutlichung ist in Abb. 47 daher erneut der bereits in Abb. 45 gezeigte Übergangsbereich dargestellt. Farblich kodiert ist die Korrelation zwischen den numerisch und den experimentell ermittelten Eigenformen der doppelten Eigenfrequenz. Im oberen Diagramm ist die Korrelation mit der experimentell ermittelten Eigenform bei 513,1 Hz dargestellt. Blau entspricht dabei einem MAC-Wert von 0, Grün einem MAC-Wert von 1. Zu Beginn der Parametervariation ist die 13. Eigenfrequenz eindeutig

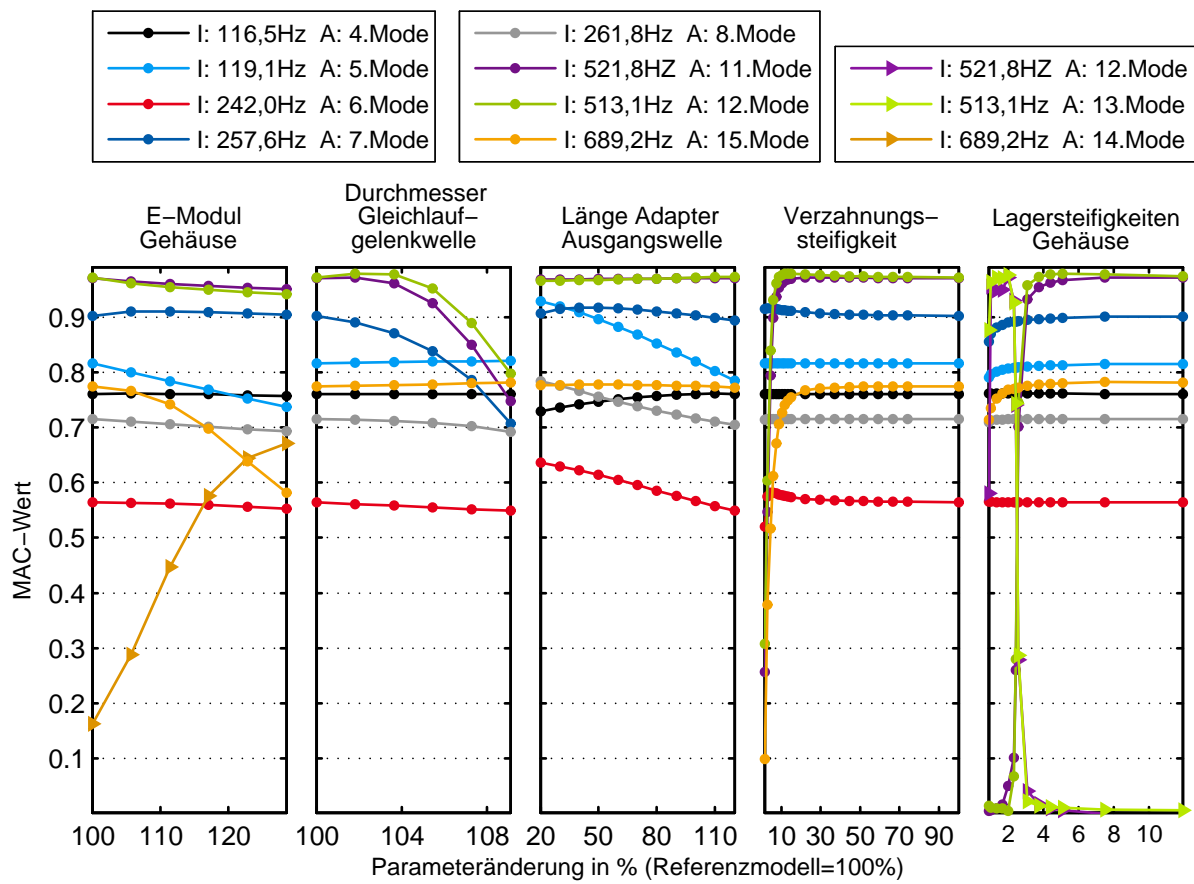


Abbildung 46: MAC-Werte der ausgewählten Eigenform-Zuordnungen in Abhängigkeit der Parametervariationen. Mit Kreisen sind Zuordnungen entsprechend des Referenzmodells markiert. Mit Dreiecken sind Paarungen markiert, die erst durch Parametervariationen aufgrund von *mode veering* entstehen. *I*: entspricht den mit *Test for I-deas*, experimentell ermittelte Ergebnissen, *A*: den mit *ANSYS®* numerisch ermittelte Ergebnissen.

der experimentell ermittelten bei 513,1 Hz zuzuordnen. Im Übergangsbereich ist keine eindeutige Zuordnung möglich. Danach ist die 12. eindeutig der Eigenform bei 513,1 Hz zuzuordnen. Im unteren Diagramm ist die Korrelation mit der höheren experimentell ermittelten Eigenfrequenz bei 521,8 Hz dargestellt. Es zeigt sich, dass zunächst die 12. und nach dem Übergangsbereich die 11. numerische Eigenform mit dieser experimentell bestimmten korreliert. Dies legt nahe, dass sich die numerisch ermittelten Eigenformen im Übergangsbereich zwar durch Parametervariationen ändern lassen, der Einfluss jedoch auf den Übergangsbereich beschränkt ist.

Allgemein wird festgehalten, dass der Einfluss im Wesentlichen auf die Eigenfrequenzen beschränkt bleibt. Die Eigenformen werden nur minimal beeinflusst, womit ein vollständiger Abgleich des FE-Modells an das experimentell vermessenen Getriebe nicht möglich ist. Die beschriebenen Übergangsbereiche der Eigenformen sind beim Modellabgleich insofern zu berücksichtigen.

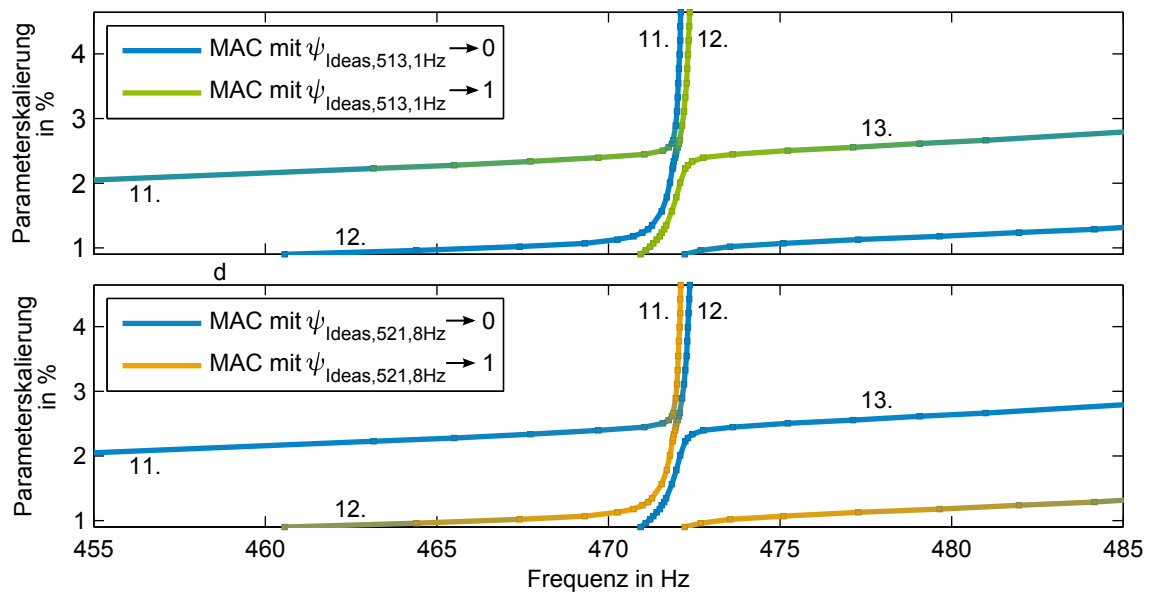


Abbildung 47: Korrelation zwischen experimentell und numerisch ermittelten Eigenformen bei zunehmender Verzahnungssteifigkeit. Im Übergangsbereich, wo sich die numerisch ermittelten Eigenformen ablösen, existiert keine eindeutige Zuordnung.

sichtigen, als dass dort auch die sonst zuordenbaren Eigenformen nicht mehr zuzuordnen sind. Im weiteren wird daher die Modellanpassung mit Fokus auf den Eigenfrequenzen behandelt.

3.8 Modellanpassung hinsichtlich Eigenfrequenzen

Der im vorigen Kapitel diskutierte Einfluss der verschiedenen Parameter auf die Eigenfrequenzen resultiert in verschiedenen Ansätzen zur Anpassung der verschiedenen Parameter: Der **Durchmesser der Gleichlaufgelenkwelle** ist der einzige Parameter, der Einfluss auf die Biegeeigenfrequenzen der Gleichlaufgelenkwelle hat. Darüber hinaus hat er nur noch auf die 7. Eigenfrequenz Einfluss. Dies ermöglicht die separate Behandlung dieses Parameters. Der Einfluss auf die Eigenform wird mit berücksichtigt und höher bewertet als die Frequenzübereinstimmung. Daher wird der Durchmesser auf 28,0 mm festgelegt. Dort ist der durchschnittliche Einfluss auf die MAC-Werte positiv.

Für die **Verzahnungssteifigkeit** wird der Wert des Referenzmodells beibehalten. Dieser ist experimentell ermittelt und nur wesentlich geringere, unrealistische Werte haben Auswirkungen auf die Eigenfrequenzen.

Der Einfluss der **Lagersteifigkeiten** lässt ebenfalls schnell nach. Durch die axiale Vorspannung der Lager sind höhere Werte als die Datenblattwerte plausibel, weshalb für das finale Modell die 10-fachen dieser verwendet werden. Der gewünschte frequenzanhebende Effekt bleibt somit erhalten. Als Nebeneffekt ist damit auch der Bereich des *mode veerings* für diesen Parameter nicht mehr relevant.

Für die Auswahl des **E-Moduls** und die **Adapterlänge** ist keine separate Behandlung möglich, da die gleichen Eigenfrequenzen von beiden Parametern beeinflusst werden. Zunächst wird dennoch für beide Parameter der Einfluss separat beurteilt. Dafür werden die Eigenfrequenzen betrachtet, die sowohl durch den jeweiligen Parameter beeinflussbar als auch einer experimentell ermittelten Eigenfrequenz zuzuordnen sind. Für den E-Modul sind dies die vierte bis achte sowie die 15. Eigenfrequenz. Für die Adapterlänge entfällt die sechste. Werden diese Eigenfrequenzen für die verschiedenen Parameterwerte jeweils über den experimentell ermittelten Eigenfrequenzen aufgetragen und durch eine Ausgleichsgerade angenähert, ist der gemittelte globale Parametereinfluss auf die ausgewählten Eigenfrequenzen graphisch darstellbar. In Abb. 48 ist dieser Zusammenhang qualitativ zu sehen. In der Abbildung a) ist die Ausgleichsgerade für das Referenzmodell und die des idealen Modells dargestellt. Bei idealer Übereinstimmung des FE-Modells mit dem Experiment, ergäbe diese Ausgleichsgerade, bei gleicher Achsenskalierung, die Winkelhalbierende.

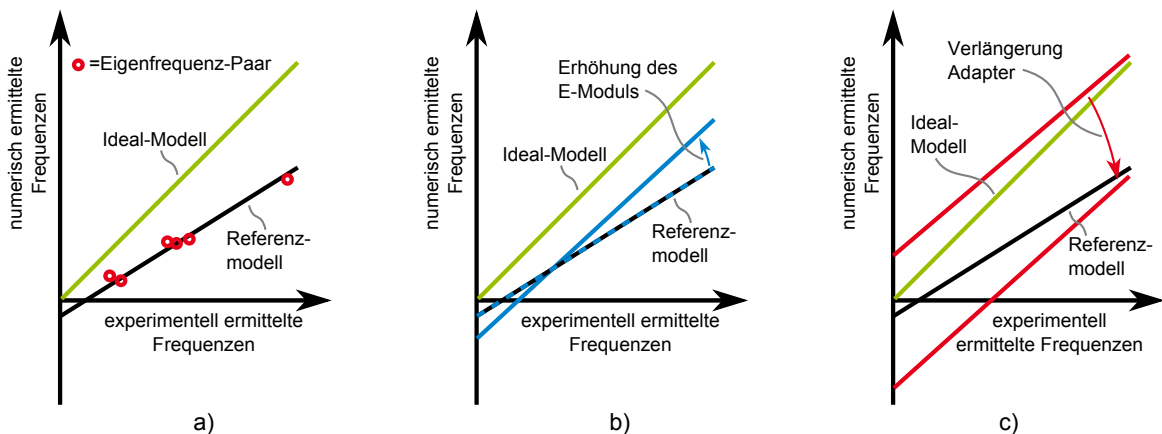


Abbildung 48: Qualitativer Einfluss der Parameter auf Ausgleichsgeraden: a) Eigenfrequenzen des Referenzmodells im Vergleich zu den experimentell ermittelten inkl. Ausgleichsgerade. b) Einfluss des E-Moduls. c) Einfluss der Adapterlänge.

Die Abbildungen b) und c) zeigen den Einfluss der beiden Parameter auf Steigung und Offset der jeweiligen Ausgleichsgeraden. Eine Erhöhung des E-Moduls wirkt sich insbesondere auf die höheren Eigenfrequenzen aus, was zu einer Steigungszunahme der Ausgleichsgeraden, jedoch nur geringen Änderung des Offsets führt. Eine Verlängerung des Adapters führt hingegen zu einer relativ gleichmäßigen Absenkung der beeinflussbaren Eigenfrequenzen, wodurch die Steigung nahezu konstant bleibt, der Offset jedoch deutlich abnimmt.

Ziel der Parameteranpassung ist die Verschiebung der Ausgleichsgeraden y_A des Referenzmodells auf die des idealen Modells. Da sich sowohl der Offset h als auch die Steigung Δ der Ausgleichsgeraden nahezu linear in Abhängigkeit der beiden Parameter ändert, ist es möglich

die Geradengleichungen in Abhängigkeit des jeweiligen Parameters anzugeben. Für die Ausgleichsgerade in Abhängigkeit des E-Moduls E folgt:

$$y_{A,E}(E, f) = \left(\Delta_{Ref} + \frac{\Delta_{E_{max}} - \Delta_{Ref}}{E_{max} - E_{Ref}} \cdot (E - E_{Ref}) \right) \cdot f + \left(h_{Ref} + \frac{h_{E_{max}} - h_{Ref}}{E_{max} - E_{Ref}} \cdot (E - E_{Ref}) \right). \quad (23)$$

Für die Adapterlänge l ergeben sich ausgehend vom Referenzmodell zwei verschiedene Geradengleichungen, da der Parameterbereich sowohl unter- als auch oberhalb von diesem liegt. Im weiteren wird jedoch nur der Bereich $l < l_{Ref}$ betrachtet. Für $l > l_{Ref}$ existieren analoge Gleichungen. Die Geradengleichung für den Parameterbereich unterhalb des Referenzmodells lautet:

$$y_{A,l}(l, f) = \left(\Delta_{Ref} + \frac{\Delta_{l_{min}} - \Delta_{Ref}}{l_{Ref} - l_{min}} \cdot (l_{Ref} - l) \right) \cdot f + \left(h_{Ref} + \frac{h_{l_{min}} - h_{Ref}}{l_{Ref} - l_{min}} \cdot (l_{Ref} - l) \right). \quad (24)$$

Mithilfe dieser Gleichungen ((23), (24)) wird der Einfluss beider Parameter gleichzeitig berücksichtigt, um von der Ausgleichsgeraden des Referenzmodells zu der des idealen Modells zu gelangen. Diese hat den Offset $h_{ideal} = 0$ und die Steigung $\Delta_{ideal} = 1$ und ergibt sich aus der Summe der Ausgleichsgeraden des Referenzmodells sowie der Änderungen durch die beiden Parameter.

$$\begin{aligned} & \left(\Delta_{Ref} + \frac{\Delta_{E_{max}} - \Delta_{Ref}}{E_{max} - E_{Ref}} \cdot (E - E_{Ref}) + \frac{\Delta_{l_{min}} - \Delta_{Ref}}{l_{Ref} - l_{min}} \cdot (l_{Ref} - l) \right) \cdot f + \\ & \left(h_{Ref} + \frac{h_{E_{max}} - h_{Ref}}{E_{max} - E_{Ref}} \cdot (E - E_{Ref}) + \frac{h_{l_{min}} - h_{Ref}}{l_{Ref} - l_{min}} \cdot (l_{Ref} - l) \right) \stackrel{!}{=} \Delta_{ideal} \cdot f + h_{ideal} \end{aligned} \quad (25)$$

In Matrix-Schreibweise ergibt sich daraus folgendes Gleichungssystem mit den zwei unbekannten Parametern E-Modul E und Adapterlänge l

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_{E_{max}} - \Delta_{Ref}}{E_{max} - E_{Ref}} & -\frac{\Delta_{l_{min}} - \Delta_{Ref}}{l_{Ref} - l_{min}} \\ \frac{h_{E_{max}} - h_{Ref}}{E_{max} - E_{Ref}} & -\frac{h_{l_{min}} - h_{Ref}}{l_{Ref} - l_{min}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ l \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 1 - \Delta_{Ref} + \frac{\Delta_{E_{max}} - \Delta_{Ref}}{E_{max} - E_{Ref}} \cdot E_{Ref} - \frac{\Delta_{l_{min}} - \Delta_{Ref}}{l_{Ref} - l_{min}} \cdot l_{Ref} \\ 0 - h_{Ref} + \frac{h_{E_{max}} - h_{Ref}}{E_{max} - E_{Ref}} \cdot E_{Ref} - \frac{h_{l_{min}} - h_{Ref}}{l_{Ref} - l_{min}} \cdot l_{Ref} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt die für diese Mittlung optimale Parameterkombination. Die final verwendeten Parameter sind in Tabelle 7 angegeben.

Der so ermittelte Wert des E-Moduls ließe bei isolierter Betrachtung eine deutliche Verringerung des MAC-Wertes der 15.-Eigenform erwarten (vgl. Abb. 46). Die geringere Länge des Adapters wirkt hier jedoch entgegen; sie führt zu einem größeren Frequenzabstand zwischen 14. und 15. Eigenfrequenz und schwächt damit den Einfluss des *mode veerings* ab.

Tabelle 7: Final verwendete Parameterwerte

	E-Modul Gehäuse	89000 N/mm ²
	Durchmesser Gleichlaufgelenkwelle	28 mm
	Länge Adapter Ausgangswelle	33 mm
	Verzahnungssteifigkeit	270000 N/mm
Gehäuse-Lagersteifigkeit	Eingangswelle radial	1178510 N/mm
	Eingangswelle axial	882350 N/mm
	Ausgangswelle radial	1301080 N/mm
	Ausgangswelle axial	1040000 N/mm
	Vorgelegewelle radial (eingangsseitig)	1225650 N/mm
	Vorgelegewelle axial (eingangsseitig)	472700 N/mm
	Vorgelegewelle radial (ausgangsseitig)	4006940 N/mm

3.9 Ergebnisse der numerischen Modalanalyse des abgeglichenen FE-Modells

Die Ergebnisse des abgeglichenen Modells sind in Abb. 49 und 50 im Vergleich zu den experimentell ermittelten sowie in Tab. 8 zusätzlich zu den Ergebnissen des numerischen Referenzmodells dargestellt. Abbildung 49 zeigt die erreichte Übereinstimmung hinsichtlich der Eigenfrequenzen. Nach wie vor ist eine gemittelte Abweichung zum Ideal-Modell vorhanden. Sie ist jedoch deutlich geringer als die des Referenzmodells und wird vor allem durch die akzeptierten zu niedrigen Frequenzen der 11. und 12. Eigenform verursacht (vgl. Tab. 8).

Tabelle 8: Vergleich der experimentell und numerisch ermittelten Eigenfrequenzen

exp. ermittelt (in Hz)	num. Referenzmodell (in Hz)	finales num. Modell (in Hz)
116,5	101,9	118,4
119,1	113,7	131,7
242,0	213,4	218,7
257,6	229,6	247,3
261,8	236,7	258,5
513,1	472,6	481,4
521,8	472,3	480,6
689,2	634,5	667,7

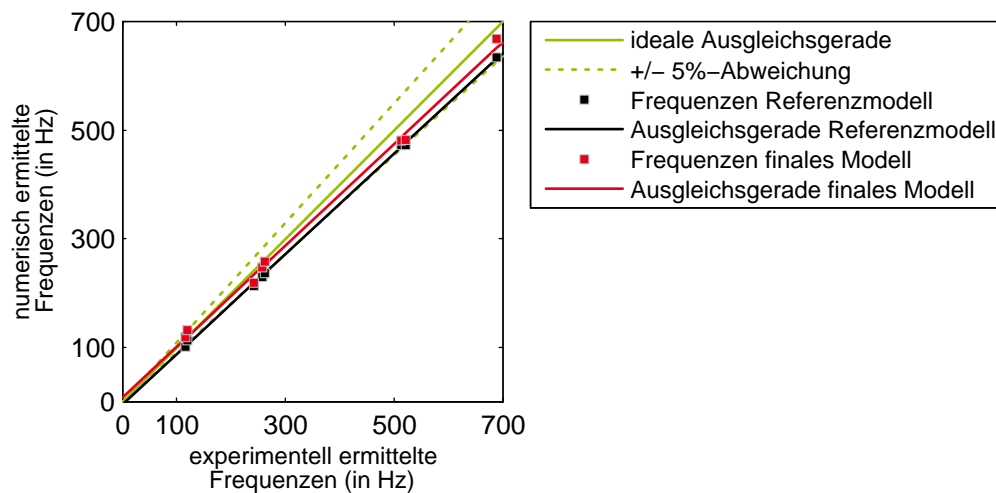
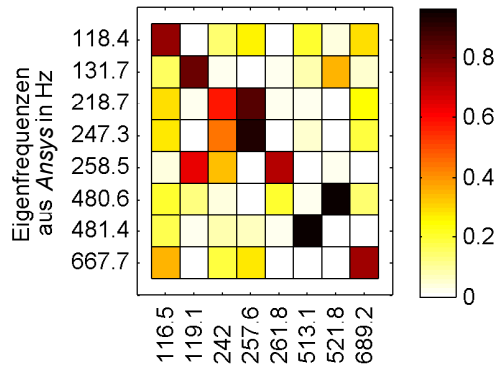


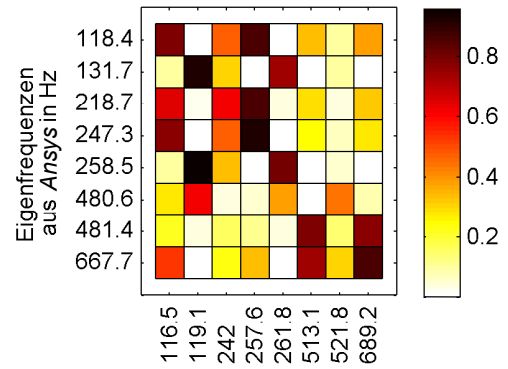
Abbildung 49: 45°-Plot des Referenzmodells und des finalen Modells. Bei ideal abgeglichenem Modell stimmen numerisch und experimentell ermittelte Eigenfrequenzen überein und ergeben die ideale Ausgleichsgerade als Winkelhalbierende. Das final abgeglichene Modell weist eine höhere Nähe zu dieser auf als das Referenzmodell.

Aus Abb. 50 ist ersichtlich, dass sich die Übereinstimmungen hinsichtlich der Eigenformen kaum ändern. Die Berücksichtigung der Wellen-Auslenkungen spielen hier jedoch eine große Rolle. Werden diese nicht mit berücksichtigt, ergibt sich insbesondere bei den beiden gleichlaufgelenkwelldominierten Eigenformen um 480 Hz ein deutlich geringerer MAC-Wert. Die Eigenform bei 668 Hz hingegen profitiert von der Vernachlässigung der Wellen-Mess-Freiheitsgrade. Werden nur die Gehäuse-Anteile der Eigenformen betrachtet, ergeben sich auf der Diagonalen höhere MAC-Werte, was einer guten Übereinstimmung des FE-Modells mit den experimentell ermittelten Eigenformen, insbesondere das Gehäuseverhalten betreffend, entspricht.



Eigenfrequenzen aus *Test for I-deas* in Hz

(a) alle Messpositionen



Eigenfrequenzen aus *Test for I-deas* in Hz

(b) nur Gehäuse-Messpositionen

Abbildung 50: MAC-Matrix der ausgewählten experimentellen und final abgeglichenen numerischen Eigenformen in Abhängigkeit der verwendeten Eigenvektor-Einträge.

3.10 Erweiterung des abgeglichenen Modells

Wie bereits in Kapitel 2.4 erwähnt, entspricht der hier untersuchte Prüfstandsaufbau nicht der Konfiguration, von der bekannt ist, dass mit ihr das Getriebeheulen reproduzierbar ist. Dies ist der Fall für einen Aufbau mit wesentlich längerer Gleichlaufgelenkwelle. Für jenen Aufbau tritt das Getriebeheulen im Drehzahlbereich der Eingangswelle von 2000 bis 2600 min^{-1} auf. Es ist dann deutlich wahrnehmbar bei einer Frequenz von ca. 680 Hz. Da das Phänomen nur bei eingelegtem zweiten Gang auftritt, lässt sich aus dieser Werte-Kombination schließen, dass die Anregung durch die Verzahnung des zweiten Gangs verursacht wird. Mit der Eingangsdrehzahl n_{ein} in 1/min, dem Übersetzungsverhältnis der Festverzahnung $i_{FV} = \frac{29}{39}$ und der Zähnezahl des treibenden Zahnrades des zweiten Gangs $z_{2,t} = 23$ ergibt sich über

$$f_{\text{an}} = n_{\text{ein}} \cdot \frac{1}{60 \text{ s}} \cdot i_{FV} \cdot z_{2,t} \quad (27)$$

ein Anregungsfrequenzbereich von ca. 570 bis 740 Hz. Um zu überprüfen, ob in diesem Frequenzbereich für die Prüfstandskonfiguration mit langer Gleichlaufgelenkwelle eine Eigenfrequenz liegt, die als Ursache des Getriebeheulens in Betracht kommt, wird das finale Modell entsprechend angepasst. Hierfür wird der Mittelteil der Gleichlaufgelenkwelle entsprechend verlängert. Für dieses Modell ergibt sich eine Eigenfrequenz bei 662,7 Hz. Die zugehörige Eigenform ist in Abb. 51 dargestellt. In der Wellendarstellung ist auch das Federelement dargestellt, welches die Steifigkeit der Verzahnung abbildet. Die deutliche Deformation dieses Elements spricht für die Anregbarkeit dieser Eigenform durch Kräfte an dieser Stelle. Somit ist diese Eigenform als Ursache für das Resonanzproblem *Getriebeheulen* identifiziert.

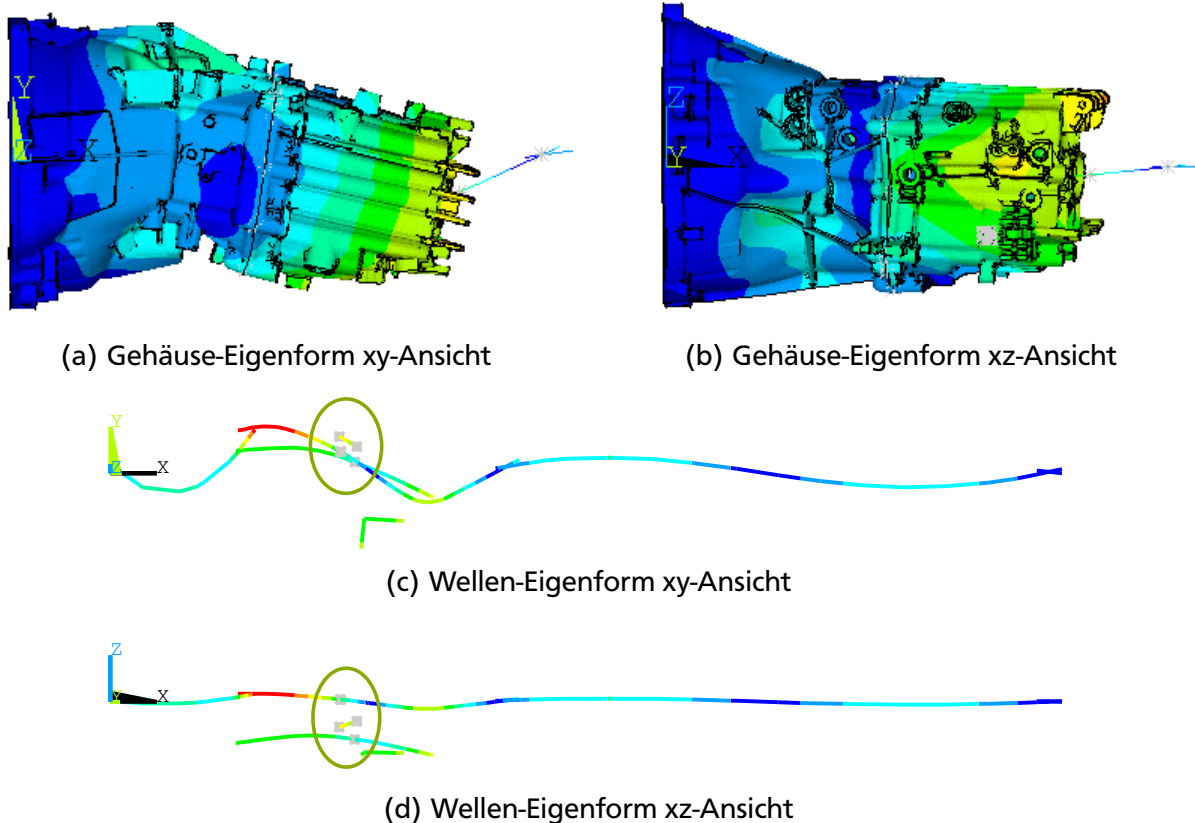


Abbildung 51: 15. Eigenform der Prüfstandskonfiguration mit langer Gleichlaufgelenkwelle bei 662,7 Hz (dunkelblau $\hat{=}$ Auslenkung=0, rot $\hat{=}$ Auslenkung=max). Mit Kreisen sind die Federelemente markiert, welche die Verzahnungssteifigkeit abbilden.

Ein Vergleich mit den Eigenformen des finalen numerischen Modells mit der kurzen Gleichlaufgelenkwelle (vgl. Abb. 52) zeigt, dass bei einer sehr ähnlichen Frequenz von 667,7 Hz ebenfalls eine Eigenform existiert, die sich beinahe nur durch die Verformung der Gleichlaufgelenkwelle unterscheidet. Werden für eine MAC-Wert-Berechnung dieser beiden Eigenformen lediglich die Messpunkte auf dem Gehäuse verwendet, ergibt sich ein Wert >0.99 , womit auch der quantitative Beleg vorliegt, dass sie sich bei alleiniger Betrachtung des Getriebes ohne Gleichlaufgelenkwelle sehr ähnlich sind. Eine beispielhafte hier nicht weiter ausgeführte Variation der Wellenlänge im FE-Modell zeigt, dass diese Eigenform in einem weiten Bereich nicht von der Wellenlänge abhängt. Durch die sehr geringe Biegesteifigkeit des antriebsseitigen Gelenks der Gleichlaufgelenkwelle besteht nur eine geringe für diese Eigenform relevante Kopplung zwischen dem Getriebe und der Welle.

Werden schließlich die Ergebnisse aus Abschnitt 3.6 hinzugezogen, zeigt sich, dass diese Eigenform der experimentell ermittelten bei 689,2 Hz entspricht. Der MAC-Wert der experimentell ermittelten und der 15. Eigenform des numerischen Modells mit der kurzen Gleichlaufgelenkwelle unter bloßer Berücksichtigung der Gehäusemessknoten ergibt sich zu 0,88. Das räumlich

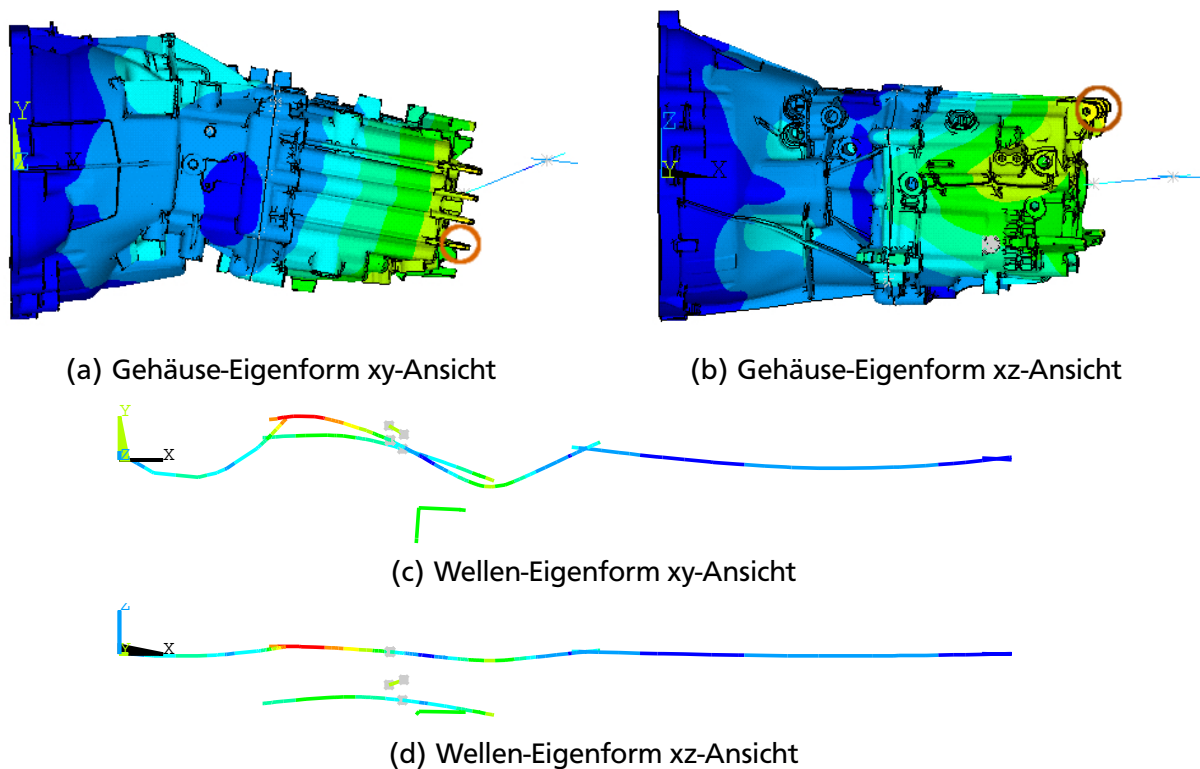


Abbildung 52: 15. Eigenform der Prüfstandskonfiguration mit kurzer Gleichlaufge-
lenkwelle bei 667,7 Hz (dunkelblau $\hat{=}$ Auslenkung=0, rot $\hat{=}$ Auslen-
kung=max). Mit Kreisen ist der später verwendete Referenzknoten
markiert.

hoch aufgelöste FE-Modell bildet somit das Verhalten des experimentell vermessenen Getriebes in ausreichender Genauigkeit ab und wird für die weiteren Untersuchungen genutzt.

4 Elektromechanische Schwingungsbeeinflussung der Heul-Eigenform

Für die verschiedenen Möglichkeiten der Schwingungsbeeinflussung der identifizierten Heul-Eigenform werden im weiteren nur piezoelektrische Flächenwandler als Aktoren behandelt. Diese sind einfach auf bestehende Strukturen zu applizieren und benötigen sehr wenig Bauraum, weshalb sie für die Anwendung als Add-on-Applikation am Getriebegehäuse besonders geeignet erscheinen. Zunächst werden die benötigten grundlegenden Eigenschaften piezoelektrischer Materialien erläutert. Anschließend wird die Modellierung der piezoelektrischen Flächenwandler auf das bestehende FE-Modell behandelt. Mit Hilfe eines aus dem FE-Modell extrahierten Modells des Gesamtsystems, bestehend aus Getriebe und piezoelektrischen Flächenwandlern, werden schließlich verschiedene Nutzungsvarianten simulativ umgesetzt und diskutiert.

4.1 Grundlagen piezoelektrischer Keramiken

Die Eigenschaft der piezoelektrischen Keramiken, die sie wesentlich von herkömmlichen Keramiken unterscheidet, ist der direkte bzw. inverse piezoelektrische Effekt. Der direkte Effekt beschreibt die Ausbildung eines elektrischen Feldes bei Aufbringen einer mechanischen Dehnung, der inverse die Ausbildung einer mechanischen Dehnung bei Anlegen eines elektrischen Feldes an der Keramik. Beide Effekte werden je nach Anwendung bei der weiteren Untersuchung genutzt. Im Falle von Flächenwandlern resultiert aus einem in Dickenrichtung angelegten elektrischen Feld eine mechanische Dehnung in Flächenrichtung. Allgemein stellt nach [59] die elektromechanische Grundgleichung den Zusammenhang der elektrischen und mechanischen Größen dar:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^T & \boldsymbol{\varepsilon}_T \\ \mathbf{s}_E & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Hierin sind

- \mathbf{D} der Vektor der dielektrischen Verschiebungen,
- \mathbf{T} der Vektor der mechanischen Spannungen,
- \mathbf{E} der Vektor der elektrischen Felder,
- \mathbf{S} der Vektor der mechanischen Dehnungen,
- \mathbf{d} die Matrix der piezoelektrischen Ladungskonstanten,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_T$ die Matrix der Permittivitäten bei konstanter mechanischer Spannung und
- \mathbf{s}_E die Matrix der Elastizitätskonstanten bei konstanter elektrischer Feldstärke.

Die in den Matrizen \mathbf{d} , $\boldsymbol{\varepsilon}_T$ und \mathbf{s}_E enthaltenen Parameter d_{ki} , $\varepsilon_{T,il}$ und $s_{E,jk}$ ($i, l = 1, 2, 3$ und $j, k = 1, 2, \dots, 6$) sind abhängig vom verwendeten Keramikmaterial. Sie weisen richtungsabhängiges Verhalten auf, was sich in den Indizes widerspiegelt. Die Bedeutung der einzelnen Indizes

ist Abb. 53 zu entnehmen. Die Indizes sind entsprechend eines Rechts-Koordinatensystems definiert, wobei die z-Achse der Polarisationsrichtung und gleichzeitig der positiven Ladungskonstanten d_{33} zugeordnet ist [60].

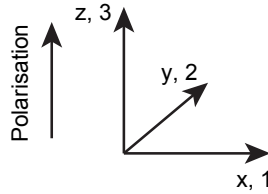


Abbildung 53: Indizierung der Piezo-Parameter

Aus dem in Gl. (28) gegebenen Zusammenhang folgt, dass im Falle der Schwingungsbeflussung der Heul-Eigenform der durch diese Eigenform verursachten Oberflächendehnung auf dem Gehäuse besondere Bedeutung zukommt. Werden die Flächenwandler auf Bereiche großer Dehnungen appliziert, resultieren daraus durch den direkten piezoelektrischen Effekt große elektrische Spannungen und somit die Möglichkeit, dem System die so gewandelte Energie zu entziehen. Entsprechend resultieren aus angelegten elektrischen Spannungen große Dehnungen und somit eine gute Beeinflussbarkeit der entsprechenden Eigenform. Eine Kennzahl für die gewandelte Energie stellt der elektromechanische Kopplungsfaktor k dar. Er ist für den direkten piezoelektrischen Effekt nach [12] definiert als:

$$k^2 = \frac{\text{in elektrische Ladung gewandelte mechanische Energie}}{\text{zugeführte mechanische Energie}} \quad (29)$$

und für den inversen piezoelektrischen Effekt als:

$$k^2 = \frac{\text{in mechanische Dehnung gewandelte elektrische Energie}}{\text{zugeführte elektrische Energie}}. \quad (30)$$

Wesentlichen Einfluss auf den Kopplungsfaktor haben zum einen die Eigenschaften des verwendeten Materials, zum anderen die Positionierung und geometrische Auslegung der Flächenwandler. Für einzelne Eigenformen wird der generalisierte elektromechanische Kopplungsfaktor über die Eigenfrequenzen des Gesamtsystems bei geöffneten (ω_{oc}) und kurzgeschlossenen Elektroden (ω_{cc}) bestimmt:

$$k_l^2 = \frac{\omega_{oc}^2 - \omega_{cc}^2}{\omega_{oc}^2} \quad (31)$$

Bei geöffneten Elektroden wirkt der Piezo rein kapazitiv und somit versteifend auf die Struktur. Bei kurzgeschlossenen Elektroden bildet sich kein Potentialunterschied aus, womit sich die

piezoelektrische Keramik rein mechanisch verhält. Wird die Keramik zu dick gewählt, dominiert der mechanische Einfluss und der gewünschte Effekt verliert an Wirksamkeit. Mit dem Koppungsfaktor ist somit ein Gütemaß gegeben, das wie beispielsweise in [9] für die geometrische Optimierung der Flächenwandler verwendet wird.

4.2 Modellierung der piezoelektrischen Flächenwandler

Ausgehend vom abgeglichenen FE-Modell und der identifizierten Heul-Eigenform, werden zunächst die Bereiche großer Dehnungen ausgewählt, die sich für die Applikation der Flächenwandler eignen. Die Dehnungen erlauben lediglich eine qualitative Aussage, da es sich um modale Dehnungen handelt, die ausschließlich aus dem Systemeigenverhalten abgeleitet werden und nicht aus extern angreifenden Kräften resultieren. Die FE-Lösungen werden standardmäßig im globalen Koordinatensystem angegeben, weshalb lokale Koordinatensysteme definiert werden, die tangential an der Gehäuseoberfläche liegen. Durch die Transformation der Lösung in diese ist die bereichsweise Auswertung der Oberflächendehnungen möglich. Die so erhaltenen Lösungen sind gültig in Bereichen, wo die Gehäuseoberfläche parallel zur x-y-Ebene der lokalen Koordinatensysteme liegen. Beispielhaft sind in Abb. 54 die Dehnungen in x-Richtung des dargestellten lokalen Koordinatensystems auf einer Versteifungsrippe gezeigt. Die hier auftretenden Dehnungen mit Werten von ca. 0,012 bis 0,023 sind typisch für Bereiche auf den verschiedenen Versteifungsrippen und ca. eine Ordnung größer als die ansonsten auf dem Gehäuse vorkommenden Dehnungen. Zwar existieren lokal auch höhere Dehnungen, diese Bereiche sind jedoch aus anderen Gründen nicht für die Applikation von Flächenwandlern geeignet, da von potentiellen Applikationsbereichen

- eine deutlich größere Oberflächendehnungen als auf der restlichen Gehäuseoberfläche und
- stark ausgeprägte Hauptkrümmung in höchstens einer Richtung

gefordert werden.

In Abb. 54 liegen die größten Dehnungen in einer geometrischen Kerbe. Wenn das FE-Netz in diesem Bereich verfeinert würde, würde das Dehnungsmaximum lokal stärker begrenzt. Eine Netzverfeinerung wird mit dem gegebenen Modell jedoch nicht realisiert, da ANSYS® dies nur ermöglicht, wenn im gesamten Modell keine Kontaktbedingungen definiert sind [46]. Da bereits im Ausgangsmodell an nahezu 7000 Knoten Kontakte definiert sind, die nach dem Entfernen wieder manuell erstellt werden müssten, wird keine Netzverfeinerung durchgeführt. Bereiche maximaler Dehnungen nahe geometrischer Kerben werden bei der Platzierung der Flächenwandler ausgespart. Da die betroffenen Bereiche klein sind, ist nur ein geringer Einfluss auf die weiteren Ergebnisse zu erwarten.

Die Auswertung mit den lokalen Koordinatensystemen liefert schließlich sieben Bereiche, welche die genannten Forderungen erfüllen. Alle Bereiche liegen auf Versteifungsrippen des Getriebegehäuses und weisen keine Krümmung auf. Die Abbildungen der übrigen Bereiche finden sich im Anhang (142 bis 146). Bei einer praktischen Umsetzung würde in diesen Bereichen

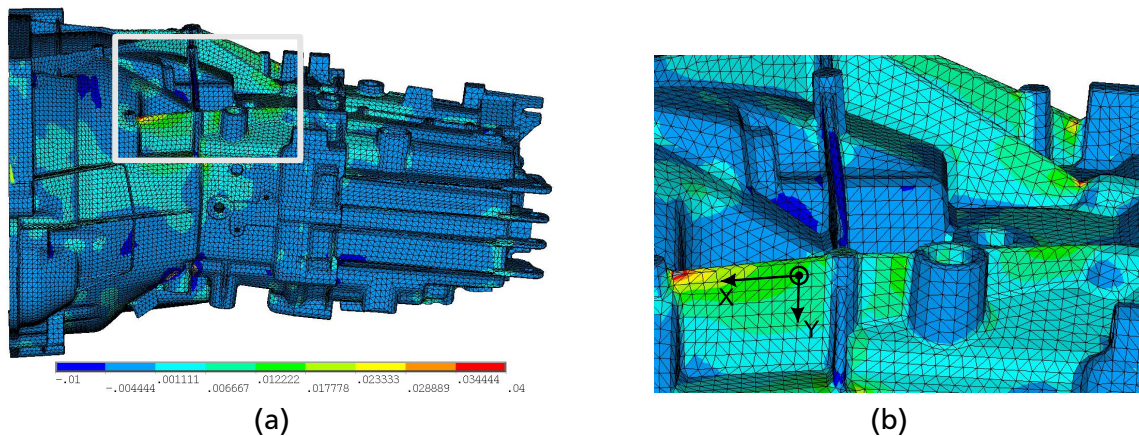


Abbildung 54: Bereiche mit großen Dehnungen in x-Richtung des in (b) eingezeichneten lokalen Koordinatensystem. Die Dehnungen besitzen eine rein qualitative Aussagekraft für die Heul-Eigenform bei 667,7 Hz

auf beide Seiten der Versteifungsrippen Flächenwandler appliziert. Der Modellierungsaufwand wird reduziert, indem die Flächenwandler einseitig, dafür mit entsprechend skaliert Höhe modelliert werden.

Da es sich bei piezoelektrischen Keramiken um anisotrope Materialien handelt, wird vor der Vernetzung des Volumens die Polarisationsrichtung über ein kartesisches lokales Koordinatensystem definiert [61]. Diese wird als z-Richtung in Flächennormalenrichtung gewählt. Die Orientierungen der x- und y-Richtungen sind beliebig, da die Materialeigenschaften in dieser Ebene isotrop sind. Das Volumen wird mit Tetraeder-Elementen (SOLID226-Elemente) diskretisiert, die speziell für die Modellierung piezoelektrischer Materialien vorgesehen sind. Sie besitzen neben den mechanischen Freiheitsgraden auch elektrische Freiheitsgrade in Form von Spannungs-Freiheitsgraden. Die physikalische Verbindung zwischen Gehäuse und Keramik wird schließlich mittels des CEINTF-Befehls über Constraint Equations implementiert. Dieser ermöglicht die Verbindung von Bereichen mit nicht identischer Vernetzung. Eine bei einer realen Umsetzung vorhandene Klebeverbindung wird hierbei als ideal steif vereinfacht. Damit werden sowohl mit der Verklebung einhergehende Verluste als auch ihr Einfluss auf die Dynamik vernachlässigt. Für die prinzipielle Untersuchung der Beeinflussbarkeit der Heul-Eigenform ist dies eine legitime Vereinfachung. Ausführliche Behandlungen zum Einfluss der Klebeverbindung finden sich beispielsweise in [13, 14]. Die Elektroden der Flächenwandler auf deren Ober- und Unterseite werden über die Kopplung der Spannungs-Freiheitsgrade aller Knoten auf den entsprechenden Flächen abgebildet. Effektiv reduziert sich damit die Anzahl der Spannungs-Freiheitsgrade auf jeweils einen Knoten pro Elektrode, die in der Modellierung des Gesamtsystems als elektrische Schnittstellen dienen. Wird eine der beiden Elektroden auf Masse gelegt, was einer elektrischen Randbedingung von 0 Volt entspricht, kann der Wert der zweiten Elektrode direkt als die am Flächenwandler anliegende Spannung bei offenen Elektroden interpretiert werden. Wird der zweiten Elektrode ebenfalls 0 Volt als Randbedingung zugewiesen, entspricht dies dem Kurz-

schließen der Elektroden. Damit ist die numerische Bestimmung des in Gl. (31) definierten Kopplungsfaktors über numerische Modalanalysen mit entsprechenden elektrischen Randbedingungen möglich.

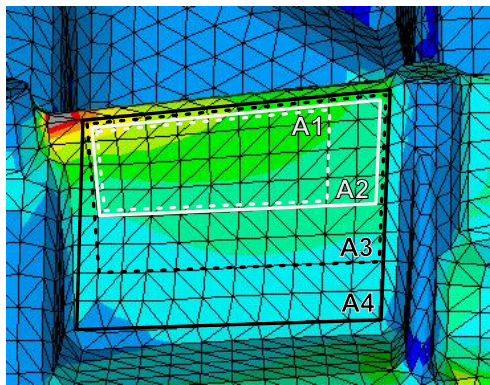
4.3 Optimierung des Kopplungsfaktors

Am Beispiel des in Abb. 54 gezeigten Bereiches wird der Einfluss der Geometrie der Flächenwandler auf den Kopplungsfaktor untersucht. Hierfür wird der Flächenwandler mit den in Tabelle 9 aufgeführten Materialparametern für die in Abb. 55 (a) gezeigten verschiedenen Grundflächen mit den Dicken 1 mm, 2 mm und 3 mm modelliert und über Gl. (31) die entsprechenden Kopplungsfaktoren berechnet. Die Ergebnisse sind in Abb. 55 (b) dargestellt.

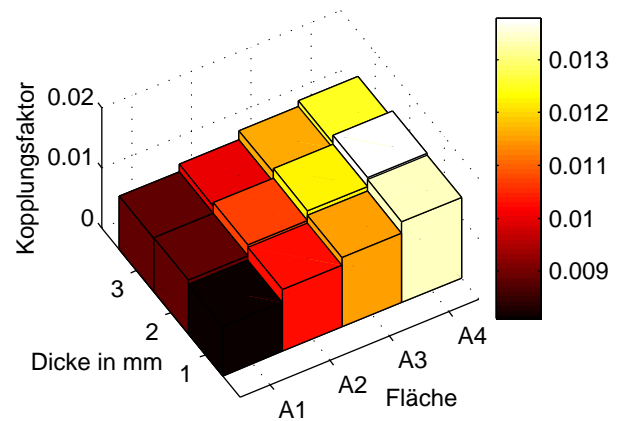
Tabelle 9: Materialparameter der verwendeten Piezo-Keramik [62]

Elektrische Daten				
Relative Dielektrizitätskonstante	$\epsilon_{r,11}^T$	$\epsilon_{r,33}^T$		
ohne Einheit ($\epsilon_0 = 8.85\text{pF/m}$)	4750	4500		
Elektromechanische Daten				
Piezoelektrischer Kopplungskoeffizient	k_{31}			
ohne Einheit	0,42			
Piezoelektrische Ladungskonstante	d_{31}	d_{33}	d_{15}	
in 10^{-12}C/N	-315	640	895	
Mechanische Daten				
Nachgiebigkeit	s_{11}^E	s_{12}^E	s_{13}^E	s_{33}^E
in $10^{-12}\text{m}^2/\text{N}$	14,2	-3,7	-6,5	20,6
Dichte	ρ			
in 10^3kg/m^3	8,1			

Es zeigt sich, dass im vorliegenden Fall die maximale Ausnutzung der zur Verfügung stehenden Fläche zum größten Kopplungsfaktor führt. Bei Dicken von mehr als 2 mm nimmt der Kopplungsfaktor jedoch für alle betrachteten Flächen wieder ab. Ab dieser Dicke beeinflusst die mechanische Steifigkeit des Flächenwandlers die Versteifungsrippen bereits so sehr, dass die Dehnungen reduziert werden und somit die elektromechanische Beeinflussbarkeit abgeschwächt wird. Für die weiteren Untersuchungen wird daher bei allen identifizierten Bereichen die volle zur Verfügung stehende Fläche und eine Dicke des Flächenwandlers von $h_0 = 2\text{ mm}$ verwendet. Im Vergleich dazu werden kommerziell angebotenen Flächenwandler beispielsweise von PHYSIK INSTRUMENTE derzeit mit einer maximalen Schichtdicke von 0,5 mm angeboten. Als Sonderanfer-



(a) verschiedene Grundflächen



(b) resultierende Kopplungsfaktoren

Abbildung 55: Bereich 6 mit verschiedenen Grundflächen für die Modellierung des applizierten Flächenwandlers Nr. 6 (a). Resultierende Kopplungsfaktoren bei variiert Fläche und Dicke des Flächenwandlers (b).

tigung werden jedoch explizit auch Multilayer-Elemente angeboten [63], womit eine effektive Keramik-Schichtdicke von 2 mm realisierbar ist. Die damit einhergehende Vergrößerung der minimalen Biegeradien ist aufgrund der fehlenden Krümmung der Applikationsbereiche unkritisch. Damit steht solch einer Ausführung lediglich die abschwächende Wirkung der Polymerummantelung entgegen, die wie die Klebeverbindung im Weiteren nicht berücksichtigt wird. Für die mit diesem Modell ermittelten Ergebnisse resultiert aus dieser Vernachlässigung eine überschätzte Wirkungsamkeit der Flächenwandler, die vor Umsetzung einer praktischen Anwendung zu berücksichtigen sind. Der relative Vergleich der verschiedenen passiven und aktiven Einsatzmethoden der Flächenwandler behält jedoch seine Gültigkeit.

In Abb. 56 sind beispielhaft die modellierten Flächenwandler 2 bis 5 auf dem Getriebegehäuse dargestellt. Der einfache Aufbau der piezoelektrischen Flächenwandler erlaubt dabei die hier zu sehenden unregelmäßigen Geometrien der Grundflächen.

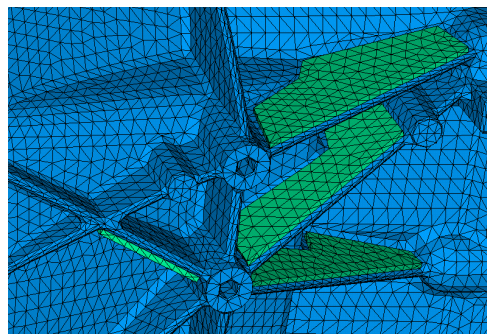


Abbildung 56: Im FE-Modell modellierte piezoelektrische Flächenwandler.

Die beschriebene Modellierung ergibt die in Abb. 57 dargestellten und Tabelle 10 gelisteten Kopplungsfaktoren für die verschiedenen Flächenwandler. Die ebenfalls dargestellten Grundflächen der Flächenwandler verdeutlichen den Einfluss der Positionierung, da dies neben der Grundfläche der einzige Parameter ist, der die Flächenwandler unterscheidet. Die Positionierung hat demnach den wesentlichen Einfluss auf die Kopplungsfaktoren und damit die Wirksamkeit der Flächenwandler.

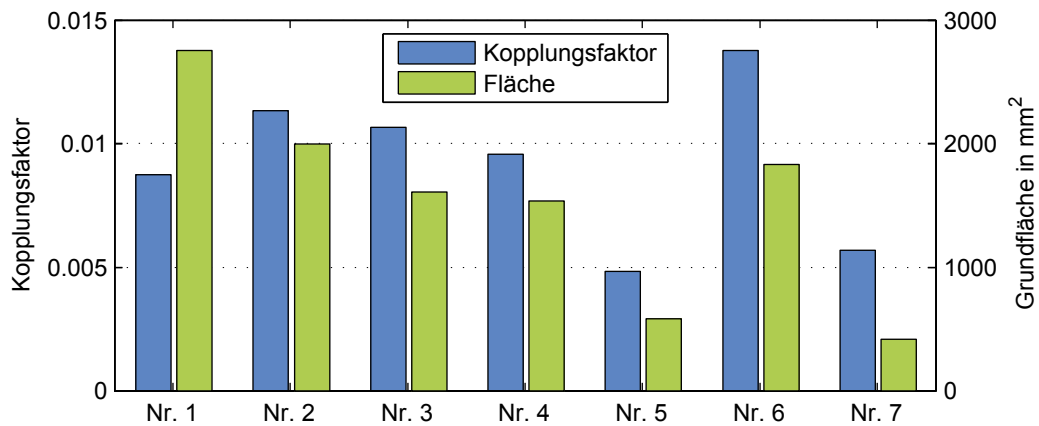


Abbildung 57: Kopplungsfaktoren und Grundflächen der verwendeten Flächenwandler.

Tabelle 10: Kopplungsfaktoren der verschiedenen Flächenwandler

Flächenwandler	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5	Nr. 6	Nr. 7
Kopplungsfaktor	0,0087	0,0113	0,0107	0,0096	0,0048	0,0138	0,0057

4.4 Modellierung des elektromechanisch gekoppelten Gesamtsystems

Das in ANSYS® modellierte Gesamtsystem bestehend aus Getriebe und applizierten piezoelektrischen Flächenwandlern dient als Ausgangsbasis für die Untersuchung der elektromechanischen Beeinflussbarkeit der Schwingungen mittels der modellierten Flächenwandler. Das Getriebemodell entspricht dem in Kapitel 3.10 beschriebenen, von dem die acht Eigenfrequenzen berücksichtigt werden, welche auch experimentell bestätigt sind. Die zugehörigen experimentell ermittelten modalen Dämpfungswerte fließen ebenfalls in das Modell ein. Die weiteren Untersuchungen erfolgen in Matlab, da hier eine flexible Umsetzung möglich ist. Die Basis bildet

das folgende Gleichungssystem, welches sowohl die mechanischen als auch die elektrischen Eigenschaften des Gesamtsystems repräsentiert [42, 64]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{pp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{p\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi p} & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad \text{mit} \quad (32)$$

- der mechanischen Massenmatrix \mathbf{M}_{pp} ,
- der mechanischen Dämpfungsmatrix \mathbf{C}_{pp} ,
- der mechanischen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{pp} ,
- den elektromechanischen Kopplungsmatrizen $\mathbf{K}_{p\phi}$ und $\mathbf{K}_{\phi p}$,
- der elektrischen Dämpfungsmatrix $\mathbf{C}_{\phi\phi}$,
- der elektrischen Permittivitätsmatrix $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ sowie
- dem mechanischen Kraftvektor \mathbf{F} ,
- dem elektrischen Ladungsvektor \mathbf{Q} ,
- dem mechanischen Auslenkungsvektor \mathbf{p} und seinen Ableitungen $\dot{\mathbf{p}}$ und $\ddot{\mathbf{p}}$ und
- dem elektrischen Potentialvektor $\boldsymbol{\phi}$ und seinen Ableitungen $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ und $\ddot{\boldsymbol{\phi}}$.

Die obere Zeile der Gl. (32) entspricht dem mechanischen, die untere Zeile dem elektrischen Verhalten des Systems. Die linke Seite der oberen Zeile wird auf den rein mechanischen Teil reduziert, indem die durch die Kopplungsmatrix $\mathbf{K}_{p\phi}$ und den Potentialvektor $\boldsymbol{\phi}$ bestimmte elektromechanische Kopplung als zusätzliche externe Kraft interpretiert wird:

$$\mathbf{M}_{pp}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_{pp}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_{pp}\mathbf{p} = \mathbf{F} - \mathbf{K}_{p\phi}\boldsymbol{\phi}. \quad (33)$$

Die Anzahl der physikalischen Freiheitsgrade \mathbf{p} in Gl. (33) ergibt sich aus dem Produkt der Anzahl der FE-Modell-Knoten und deren Freiheitsgrade. Für den rein mechanischen Teil des Modells entspricht dies bereits einer Zahl von über 1,8 Millionen. Über die Transformation auf modale Freiheitsgrade \mathbf{q} mittels der Modalmatrix \mathbf{V} in Gl. (34) reduziert sich die Anzahl der mechanischen Freiheitsgrade deutlich, da lediglich die acht relevanten Eigenfrequenzen berücksichtigt werden. Die modale Zustandsraumdarstellung ermöglicht so die numerisch effiziente Behandlung dieser Gleichung:

$$\mathbf{p} = \mathbf{V}\mathbf{q}, \quad (34)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M}_{pp} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^T \mathbf{C}_{pp} \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^T \mathbf{K}_{pp} \mathbf{V} \mathbf{q} = \mathbf{V}^T (\mathbf{F} - \mathbf{K}_{p\phi} \boldsymbol{\phi}) \quad (35)$$

und anschließend in die modale Zustandsraumdarstellung mit der Systemmatrix \mathbf{A} , der Eingangsmatrix \mathbf{B} , der Ausgangsmatrix \mathbf{C} , der Durchgangsmatrix \mathbf{D} , dem Zustandsvektor \mathbf{x} , dem Eingangsvektor \mathbf{u} und dem Ausgangsvektor \mathbf{y} überführt wird:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (36)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}. \quad (37)$$

Hierin sind:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -diag(\omega_{0,k}^2) & -diag(2\alpha_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{v} \quad \mathbf{0}], \quad \mathbf{D} = [\mathbf{0}]. \quad (40)$$

Die Eingänge \mathbf{u} und Ausgänge \mathbf{y} behalten ihre physikalischen Eigenschaften. Somit ist der Eingangsvektor \mathbf{u} gegeben durch die Summe der mechanischen Kraft \mathbf{F} und der durch den Piezo verursachten Kraft $-\mathbf{K}_{p\phi}\phi$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{K}_{p\phi}\phi. \quad (41)$$

Als Ausgangsvektor wird lediglich die Auslenkung berücksichtigt, woraus $\mathbf{y} = \mathbf{p}$ folgt. Die durch das elektrische Potential ϕ verursachte Kraft ist unbekannt und wird mit Hilfe der unteren Zeile der Gl. (32) ermittelt. Diese lässt sich nicht ohne Weiteres in eine modale Zustandsraumdarstellung überführen. Zur Simulation des Gesamtsystems werden daher die physikalischen Ein- und Ausgänge der mechanischen Zustandsraumdarstellung mit den Ein- und Ausgängen des elektrischen Teilsystems gekoppelt. Dies ist möglich unter der Annahme vernachlässigbar geringer Dämpfungsmechanismen innerhalb des piezokeramischen Materials. Die Berechtigung dieser Annahme zeigt Gl. (42). Dämpfungsmechanismen innerhalb des piezokeramischen Materials sind abhängig von der Frequenz ω und bestimmen sich nach [42] über

$$\mathbf{C}_{\phi\phi} = -\frac{1}{\omega^2}\mathbf{K}^c, \quad (42)$$

worin \mathbf{K}^c die elektrische Konduktivitäts-Koeffizienten-Matrix ist. Da die Konduktivität für das verwendete piezokeramische Material mit $< 1 \cdot 10^{-12} (\Omega\text{m})^{-1}$ angegeben ist, sind die dadurch

verursachten Verluste vernachlässigbar gering im Vergleich zu sonstigen Dissipationsvorgängen. Daher wird $\mathbf{C}_{\phi\phi} = \mathbf{0}$ gesetzt, womit sich der untere Teil der Gl. (32) vereinfacht zu:

$$\mathbf{K}_{\phi p}\mathbf{p} - \mathbf{K}_{\phi\phi}\phi = \mathbf{Q}. \quad (43)$$

Daraus ergibt sich für die elektrische Eingangsgröße ϕ :

$$\phi = -\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} (\mathbf{Q} - \mathbf{K}_{\phi p}\mathbf{p}), \quad (44)$$

womit die Darstellung des Gesamtsystems wie in Abb. 58 möglich wird. Das Modell des elektromechanisch gekoppelten Gesamtsystems besteht aus der Zustandsraumdarstellung des mechanischen Grundsystems, dem rein elektrischen System des piezoelektrischen Flächenwandlers (charakterisiert durch $\mathbf{K}_{\phi\phi}$) sowie den elektromechanischen Kopplungen. Die interne Größe $\mathbf{F}_{\text{Piezo}}$ entspricht der durch den piezoelektrischen Flächenwandler aufgetragenen mechanischen Kraft, $\mathbf{p}_{\text{Piezo}}$ der mechanischen Auslenkung der Freiheitsgrade des Flächenwandlers. \mathbf{Q}_{int} und \mathbf{U}_{int} sind Ladungen und entsprechende Spannungen, die an den inneren Freiheitsgraden des piezoelektrischen Flächenwandlers wirken.

Systemeingänge sind die mechanische Verzahnungsanregung $\mathbf{F}_{\text{Stör}}$ und die extern aufgetragene elektrische Ladung \mathbf{Q}_{ext} , Systemausgänge die mechanischen Auslenkungen \mathbf{p}_{mech} und die elektrische Spannung \mathbf{U}_{elek} .

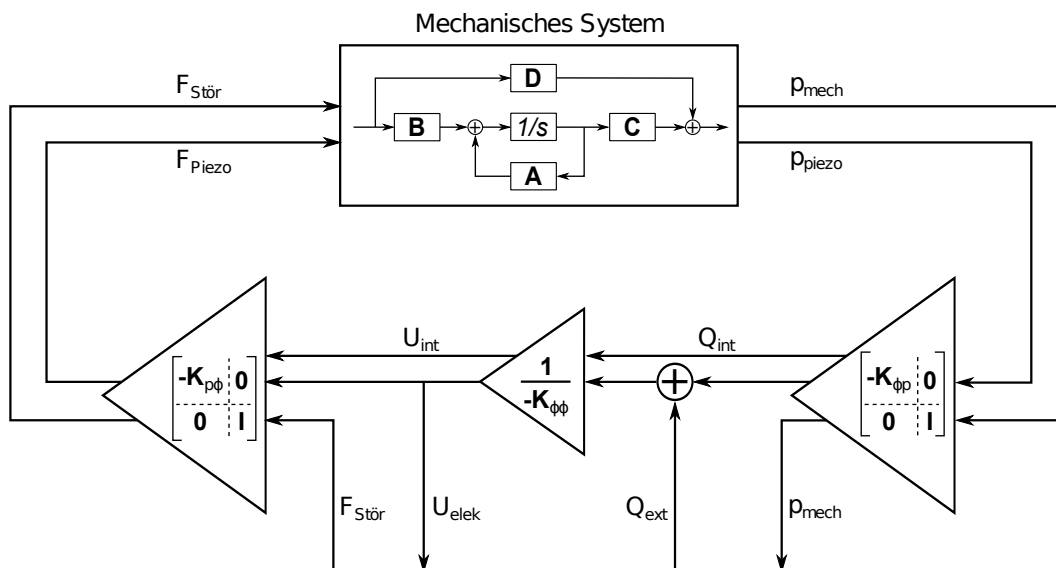


Abbildung 58: Modell des elektromechanisch gekoppelten Gesamtsystems.

4.5 Export relevanter Systemmatrizen aus dem FE-Modell

Die für dieses Modell nötigen Matrizen werden in mehreren Schritten aus ANSYS® exportiert. Die Implementierung unterschiedlicher elektrischer Randbedingungen (offene oder geschlossene Elektroden) garantieren das richtige Verhalten der Teilsysteme.

4.5.1 Mechanisches Grundsystem

Für die Zustandsraumdarstellung werden die mechanischen Eigenschaften des Gesamtsystems benötigt. Diese werden ermittelt, indem bei kurzgeschlossenen Elektroden aller Flächenwandler eine numerische Modalanalyse durchgeführt wird. Hierfür werden allen Elektroden die Randbedingung 0 V zugewiesen. Als physikalische Ein- und Ausgangsfreiheitsgrade werden die interessierenden Knoten des Getriebes p_{mech} sowie alle Knoten der Flächenwandler p_{piezo} gewählt. Berücksichtigt werden dabei nur die mechanischen Freiheitsgrade. Die interessierenden Getriebe-knoten ergeben sich aus der Ursache und Auswirkung des Getriebeheulens. Verursacht wird das Getriebeheulen durch die Anregung an der Verzahnung des 2. Gangs, weshalb die beiden Knoten, über die der Verzahnungskontakt modelliert ist, als Eingangs-Freiheitsgrade gewählt werden. Als Ausgangs-Freiheitsgrad wird ein Referenzknoten gewählt, der bei der Heul-Eigenform die maximale Gesamtauslenkung auf dem Gehäuse aufweist. Durch die Flächenwandler ist keine wesentliche Beeinflussung der Steifigkeits- und Massenverteilung des Getriebes zu erwarten, daher wird die Heul-Eigenform ihre grundsätzliche Form beibehalten, womit Auswirkungen auf den Referenzknoten als Maß für die Auswirkungen auf das Gesamtsystem interpretiert werden können. Der Referenzknoten liegt ausgangsseitig auf der Getriebeoberseite und ist in Abb. 52 (a) markiert. Mittels des SPMWRITE-Befehls und den definierten Ein- und Ausgangs-Freiheitsgraden werden die Matrizen **A**, **B**, **C** und **D** der Zustandsraumdarstellung exportiert. Die Durchgangsmatrix **D** ist hierbei eine Null-Matrix.

4.5.2 Elektrische und elektromechanische Kopplungsmatrizen

Die Permittivitäts-Matrix $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ und die piezoelektrische Koppelmatrix $\mathbf{K}_{\phi p}$ werden aus der Steifigkeitsmatrix der Flächenwandler \mathbf{K}_{piezo} (vgl. Gl. (45)) extrahiert.

$$\mathbf{K}_{piezo} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp}^* & \mathbf{K}_{p\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi p} & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Hierfür wird im FE-Modell bei allen Flächenwandlern jeweils eine Elektrode auf Masse gelegt während die andere uneingeschränkt bleibt, was geöffneten Elektroden entspricht. Alle rein mechanischen Elemente des Getriebes werden gelöscht. Sie sind für die hier extrahierten Matrizen irrelevant. Durch dieses Vorgehen wird die Größe der zu exportierenden Steifigkeitsmatrix deutlich reduziert und die Knotennummern der Flächenwandler-Elemente beibehalten, die für die

spätere Verknüpfung der Teilsysteme notwendig sind. Als Zwischenschritt einer numerischen Modalanalyse wird die Steifigkeitsmatrix der Flächenwandler erstellt, die anschließend mittels des HBMAT-Befehls exportiert wird. Über die Zuordnung der einzelnen Einträge zu mechanischen oder elektrischen Freiheitsgraden werden daraus die relevanten Teilmatrizen extrahiert. Die Teilmatrix \mathbf{K}_{pp}^* ist die rein mechanische Steifigkeitsmatrix der Flächenwandler und stellt eine Untermenge der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{pp} des Gesamtsystems inklusive Getriebe dar. Sie wird als solche nicht weiter benötigt.

In Abb. 59 ist die Besetzungsstruktur der Koppelmatrix $\mathbf{K}_{\phi p}$ dargestellt. Jedem Flächenwandler ist ein Block zugeordnet. Die scheinbare Überdeckung der elektrischen Freiheitsgrade durch mehrere Flächenwandler stellt sich bei genauerer Betrachtung als keine solche heraus. Jeder elektrische Freiheitsgrad ist nur einem Flächenwandler zugeordnet und mit einer geringen Teilmenge der zugehörigen mechanischen Freiheitsgrade gekoppelt. Lediglich ein elektrischer Freiheitsgrad pro Flächenwandler ist mit dem Großteil der zugehörigen mechanischen Freiheitsgraden gekoppelt. Über diese Freiheitsgrade kann die freie Elektrode des jeweiligen Flächenwandlers angesprochen werden. Sie dienen entsprechend dem in Abb. 58 gezeigten Blockschaltbild sowohl als Eingangs-Freiheitsgrade \mathbf{Q}_{elek} als auch als Ausgangs-Freiheitsgrade \mathbf{U}_{elek} für das elektromechanische Gesamtsystem. Darüber werden im folgenden die verschiedenen Ansätze zur Schwingungsbeeinflussung an das System gekoppelt.

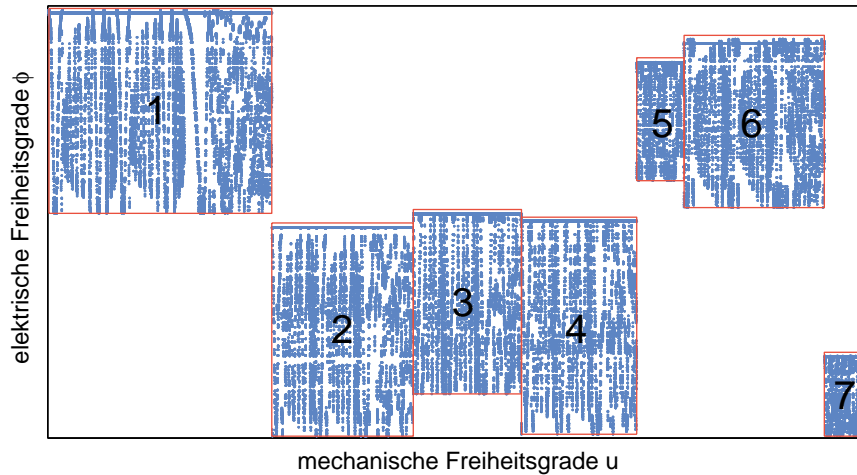


Abbildung 59: Besetzungsstruktur der Koppelmatrix

Die Permittivitäts-Matrix $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ ist eine Diagonalmatrix, die jedem elektrischen Freiheitsgrad eine Kapazität zuweist. Die Einträge, die den Elektroden-Freiheitsgraden zugeordnet sind, entsprechen den jeweiligen Gesamtkapazitäten der Flächenwandler. Analytisch lassen sich die Kapazitäten C_{Piezo}^T von piezoelektrischen Flächenwandlern bei konstanter mechanischer Spannung nach [11] näherungsweise über

$$C_{\text{Piezo}}^T = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r,33}^T \cdot A}{h} \quad (46)$$

bestimmen, worin A die Grundfläche und h die Dicke des Flächenwandlers ist. Mit den in Tabelle 9 gegebenen Materialparameter ergeben sich die in Abb. 60 dargestellten numerisch und analytisch ermittelten Kapazitäten.

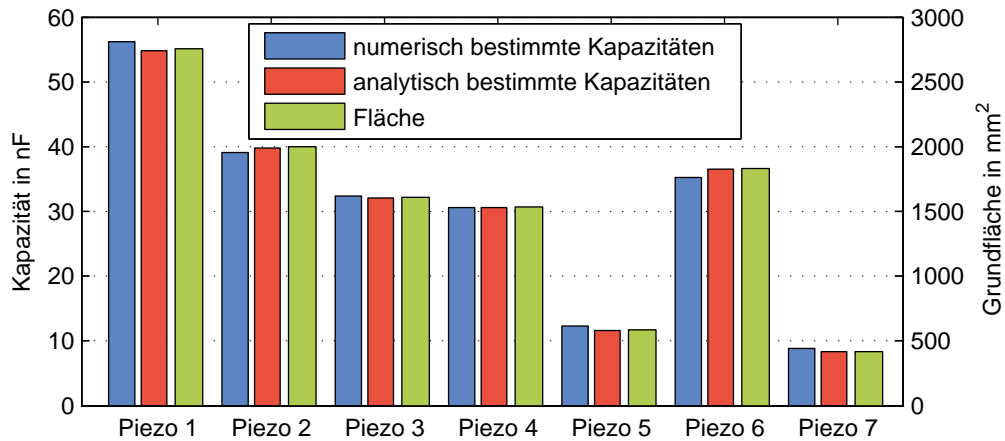


Abbildung 60: Numerisch und analytisch ermittelte Kapazitäten bei konstanter mechanischer Spannung sowie Grundflächen der einzelnen Flächenwandler.

Die gute Übereinstimmung zwischen den numerischen und analytischen ermittelten Werten rechtfertigt die weitere Verwendung des FE-basierten Modells für die im folgenden Kapitel behandelten Methoden zur Schwingungsbeeinflussung. Die ermittelten, den jeweiligen Flächenwandlern inhärenten Kapazitäten bilden dabei eine wichtige Grundlage für die Auslegung der verschiedenen Ansätze.

4.6 Passives Shunt Damping

Eine einfache Umsetzung der Schwingungstilgung mit Hilfe von piezoelektrischen Materialien ist das passive Shunt Damping. Es funktioniert analog zu mechanischen Tilgern, wobei anstelle eines Ein-Massen-Schwingers ein elektrischer Schwingkreis in Form eines LC- oder RLC-Kreises (im Weiteren *Shunt* genannt) wie in Abb. 61 gezeigt auf die zu tilgende Resonanzfrequenz abgestimmt wird.

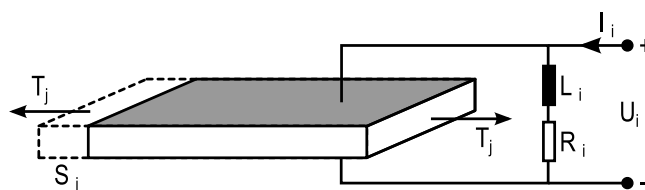


Abbildung 61: Piezoelektrischer Flächenwandler als Teil eines RLC-Schwingkreises.

Die Kapazität des Flächenwandlers C_{piezo} resultiert dabei bereits aus dessen Geometrie und dem verwendeten Material, weshalb die Resonanzfrequenz ω_e des widerstandsfreien elektrischen Schwingkreises über die Induktivität L abgestimmt wird:

$$\omega_e = \omega_{LC} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C_{piezo}}}. \quad (47)$$

Wird im elektrischen Kreis ein Widerstand R integriert, hat dieser einen zusätzlichen, jedoch nur sehr geringen Einfluss auf die Resonanzfrequenz:

$$\omega_e = \omega_{RLC} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C_{piezo}} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (48)$$

In [11] werden Gleichungen zur Auslegung der optimalen Resonanzfrequenzen ω_e und Widerstände R der elektrischen Schwingkreise für Grundsysteme bestehend aus ungedämpften Ein-Masse-Schwingern hergeleitet, die eine breite Anwendung in der Literatur finden. Im hier untersuchten Fall werden sie jedoch nicht angewandt, da es sich beim untersuchten mechanischen Grundsystem nicht wie bei [11] um einen ungedämpften Ein-Masse-Schwinger handelt, sondern um ein gedämpftes Grundsystem mit vielen Resonanzen, deren Einfluss auf die betrachtete Resonanz nicht vernachlässigbar ist. Die zugrunde liegenden Überlegungen, die zu den Auslegungsformeln führen, behalten jedoch ihre Gültigkeit und werden bei der iterativen Optimierung der Parameter f_j und R_j für die J Shunts berücksichtigt. Anhand der Abb. 62 und 63 werden sie erläutert.

Ausgehend von einer konstanten Auslegungsfrequenz $f_e = \omega_e/2\pi$ ist in Abb. 62 beispielhaft für Shunt Nr. 6 (da dessen Flächenwandler den höchsten Kopplungsfaktor aufweist) der Einfluss des elektrischen Widerstandes auf den Amplitudengang im betrachteten Resonanzbereich dargestellt. Mit steigendem Widerstand nimmt zum einen die maximale Amplitudenabsenkung zwischen den seitlichen Kurvenschnittpunkten ab, zum anderen sinken die seitlichen Amplitudenüberhöhungen. Die dargestellten Schnittpunkte von Amplitudengängen steigender Widerstände entfernen sich mit zunehmendem R von der Auslegungsfrequenz. Diese Schnittpunkte liegen bei ungedämpften Ein-Masse-Schwingern für beliebige Dämpfungs- bzw. Widerstandswerte in zwei konstanten Punkten, die lediglich von der Auslegungsfrequenz abhängen und werden sowohl bei der Auslegung piezoelektrischer Shunts (vgl. [11]) als auch bei der Auslegung von mechanischen Tilgern (vgl. [20]) zur Bestimmung der optimalen Systemparameter herangezogen. Die Auslegungsfrequenz wird so gewählt, dass beide Schnittpunkte auf gleicher Amplitudenhöhe liegen, die Dämpfungs- bzw. Widerstandswerte so, dass die maximalen Amplituden genau in diesen Schnittpunkten liegen. Bei Grundsystemen mit vielen gedämpften Resonanzen werden ähnliche Forderungen gestellt, die im folgenden erläutert werden.

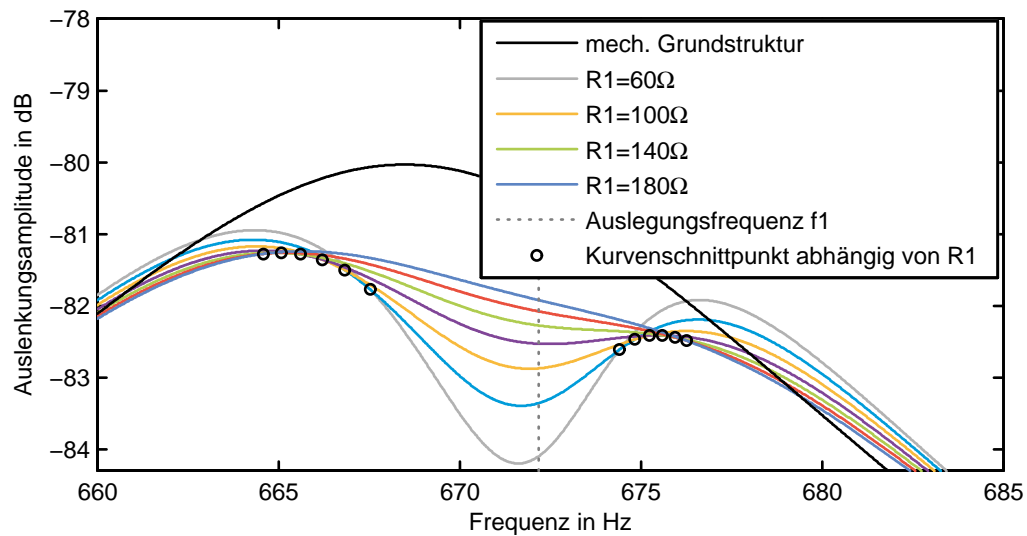


Abbildung 62: Shunt Nr. 6: Einfluss des Widerstands R des elektr. Schwingkreises auf den resultierenden Amplitudengang. Mit steigendem R nimmt die Amplitude um die Auslegungsfrequenz f zu, gleichzeitig sinken die seitlichen Überhöhungen. Markiert sind die Schnittpunkte von Kurven mit aufeinanderfolgenden Widerständen, die sich mit steigendem R von der Auslegungsfrequenz entfernen.

In Abb. 63 sind die diskutierten Schnittpunkte für drei verschiedene Auslegungsfrequenzen und verschiedene Widerstände dargestellt. Die optimale Parameterkombination ergibt sich aus der Forderung identischer Amplitudenhöhe der Schnittpunkte. Für das untersuchte gedämpfte Grundsystem mit vielen Resonanzen, ist dies beispielsweise für den dargestellten Flächenwandler Nr. 6 mit einer Kapazität von $C_{\text{piezo}} = 35,28 \text{ nF}$ bei einer Auslegungsfrequenz von $f_{\text{opt}} = 669,2 \text{ Hz}$ und einem Widerstand von ca. $R = 130 \Omega$ der Fall. Die erreichbare Amplitudenreduktion entspricht ca. 1,7 dB. Die Auslegungsfrequenz liegt etwas höher als die zu tilgende Resonanzfrequenz, woraus nach Gl. (48) die Induktivität des RLC-Kreises einen Wert von $L = 1,603 \text{ H}$ annimmt.

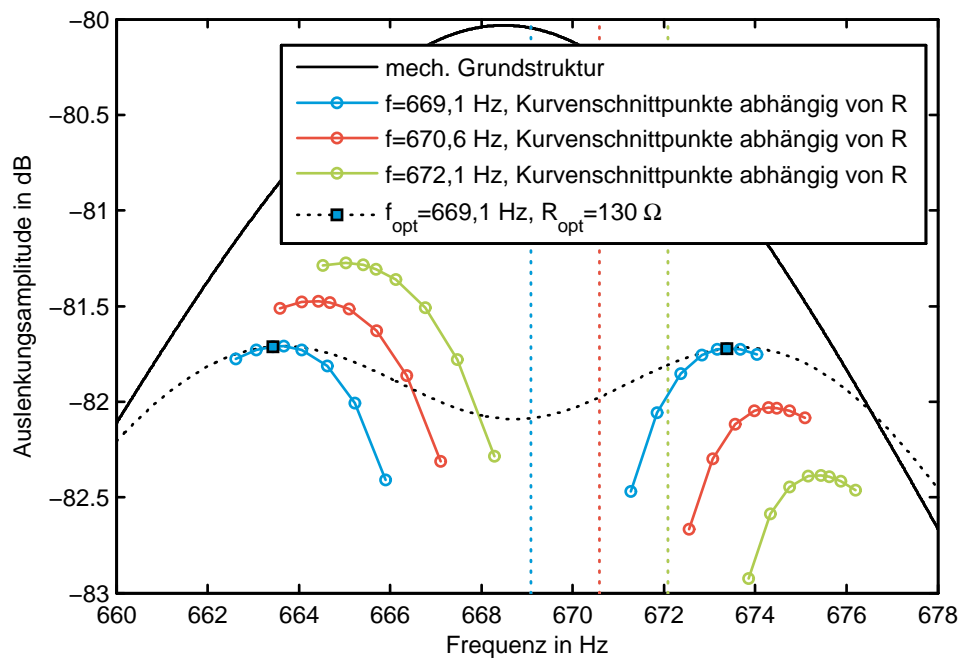


Abbildung 63: Einfluss der Auslegungsfrequenz des elektrischen Schwingkreises auf die in Abb. 62 eingeführten Kurvenschnittpunkte bei steigendem Widerstand. Optimale Kombination von Auslegungsfrequenz und Widerstand, wenn linke und rechte Amplitudenmaxima der Schnittpunkte identische Höhe aufweisen. Beispielhaft ist hier der Einfluss des Shunt mit Flächenwandler Nr. 6 dargestellt, mit dem eine maximale Reduktion von ca. 1,7 dB realisierbar ist.

4.6.1 Auslegung des monofrequenten Multi-Shunt-Systems

Einzelne Shunts, die unabhängig voneinander entsprechend des im vorigen Absatz beschriebenen Vorgehens ausgelegt werden, wirken kombiniert wie ein einzelner Shunt mit einem zu niedrig gewählten Widerstand. Dies führt zu unerwünschten Überhöhungen in den Seitenbereichen. Um diesem Effekt entgegenzuwirken wird bei Verwendung aller sieben zur Verfügung stehenden Shunts ein für alle Widerstände identischer Skalierungsfaktor S_R eingeführt, der so gewählt wird, dass der resultierende Amplitudengang minimal wird. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 64 dargestellt. Für den unskalierten Fall mit $S_R = 1$ sind seitlich deutliche Überhöhungen vorhanden, für $S_R = 2$ wird die maximalen Amplitudenreduktion von ca. 2,9 dB erreicht. Höhere Skalierungsfaktoren führen zu niedrigeren Amplitudenreduktionen, wie es beispielhaft für $S_R = 2,5$ dargestellt ist. Die anteiligen Reduktionen der einzelnen Shunts sind für die mit $S_R = 2$ skalierten Widerstände dargestellt und korrespondieren hinsichtlich der erzielbaren Amplitudenreduktion gut mit den in Abb. 57 gezeigten Kopplungsfaktoren; Shunt 6 bewirkt bei größtem Kopplungsfaktor die größte Reduktion, den geringsten Beitrag liefert Shunt 5, dessen Flächenwandler auch den geringsten Kopplungsfaktor aufweist.

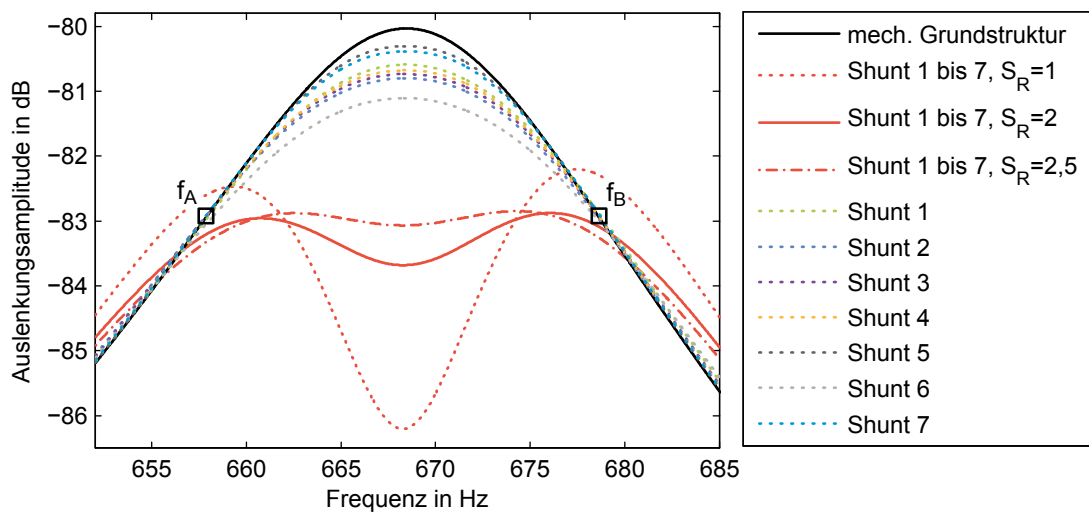


Abbildung 64: Anteilige und kombiniert maximal erreichbare Amplitudenreduktion von ca. 2,9 dB bei kombinierter Verwendung von sieben Shunts. Die maximale Reduktion wird für einen verwendeten Skalierungsfaktor von $S_R = 2$ erreicht. Für diesen Wert sind die anteiligen Reduktionen der einzelnen Shunts dargestellt. Bei den im übernächsten Abschnitt benötigten Frequenzen f_A und f_B weist die ungetilgte Amplitudenkurve den Wert der getilgten maximalen Amplitude auf.

4.6.2 Konzept des verstimmten Multi-Shunt-Systems

Faktisch führt die Applikation eines einzelnen auf eine Resonanz abgestimmten Shunts zu einer Aufspaltung dieser Resonanz in zwei eng benachbarte Resonanzen. Für $R < R_{opt}$ steigt die Amplitudenreduktion zwischen den neu entstehenden Resonanzen, gleichzeitig nehmen deren Amplitudenüberhöhungen zu (vgl. Abb. 62). Dieser Sachverhalt legt als alternative Auslegungsmöglichkeit eines Systems mit mehreren Shunts die Auslegung dieser auf unterschiedliche Frequenzen nahe.

Im Folgenden wird ein auf dieser Überlegung basierender neuer Ansatz präsentiert. Anhand der Abb. 65 und 66 wird die gegenseitige Beeinflussung von zwei Shunts hinsichtlich ihrer optimalen Auslegungsfrequenz $f_{e,j}$ und Widerstand R_j erläutert. In Abb. 65 sind die resultierenden Amplitudengänge mit zwei applizierten Shunts für jeweils drei unterschiedliche Widerstandswerte R_1 und R_2 bei konstanter Auslegungsfrequenzen f_1 und f_2 dargestellt. Es zeigt sich, dass eine optimale Kombination von $R_1 = 70 \Omega$ und $R_2 = 45 \Omega$ existiert, die zur maximalen Amplitudenreduktion im Bereich $f_1 < f < f_2$ führt. Eine größere Amplitudenreduktion ist bei diesen Auslegungsfrequenzen nicht möglich. Zur Beurteilung des resultierenden Amplitudenverlaufs wird im Folgenden als Gütemaß die maximale Amplitude zwischen den beiden Auslegungsfrequenzen f_1 und f_2 verwendet. Diese wird als Bandbreitenmaximum bezeichnet, das es durch geeignete Wahl von R_1 und R_2 zu minimieren gilt. Die Widerstände werden nach visueller Beurteilung verschiedener Widerstandskombinationen wie in Abb. 65 ausgewählt.

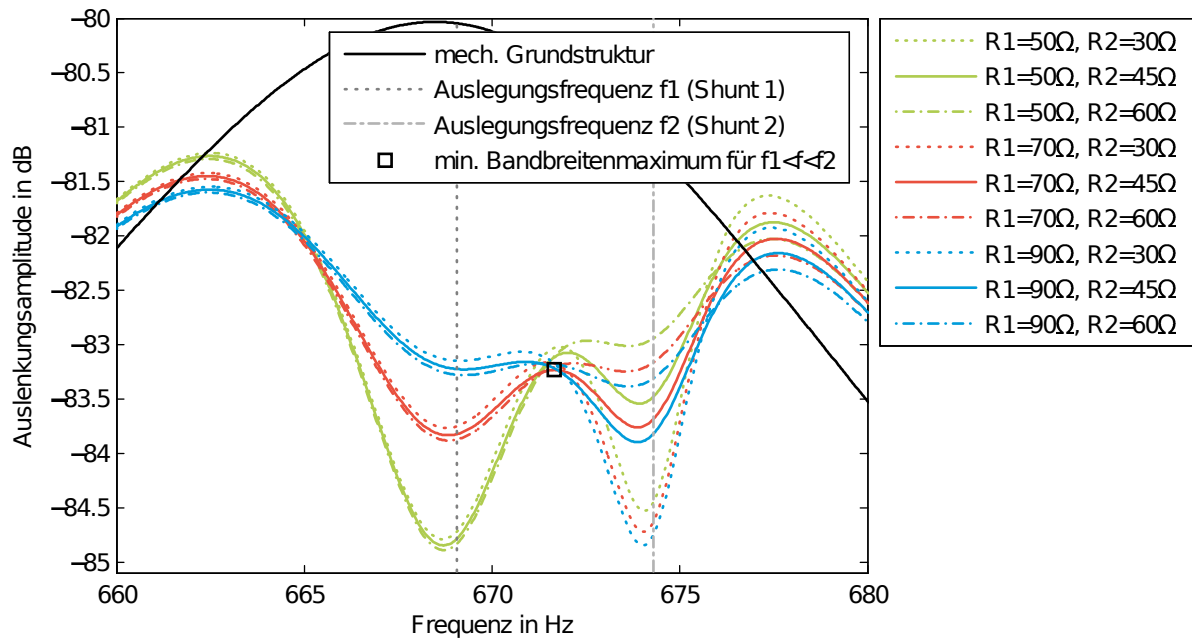


Abbildung 65: Einfluss der Widerstände R_1 und R_2 auf das minimale Bandbreitenmaximum für $f_1 < f < f_2$ bei Verwendung zweier passiver Shunts mit verschiedenen Auslegungsfrequenzen. Mit der optimalen Kombination $R_1 = 70\Omega$ und $R_2 = 45\Omega$ wird die maximale Reduktion im Bereich $f_1 < f < f_2$ erreicht.

In Abb. 66 ist der Einfluss des Frequenzabstandes $f_2 - f_1$ auf das minimale Bandbreitenmaximum bei konstantem f_1 dargestellt. Die Widerstände R_1 und R_2 sind wie in Abb. 65 optimal für den entsprechenden Frequenzabstand. Mit sinkendem Frequenzabstand zwischen den Auslegungsfrequenzen sinkt das Bandbreitenmaximum. Im Gegenzug steigen die seitlichen Überhöhungen in den Bereichen $f < f_1$ und $f > f_2$. Für den Bereich $f > f_1$ existiert eine Kombination $R_1 = opt$, $R_2 = opt$, f_2 , für welche die maximale Amplitude der seitlichen Überhöhung im Bereich $f > f_2$ gleich der maximalen Amplitude im Bereich $f_1 < f < f_2$ ist. Mit dieser iterativ zu ermittelnden Kombination wird die maximale Amplitudenreduktion im Bereich $f > f_1$ erreicht.

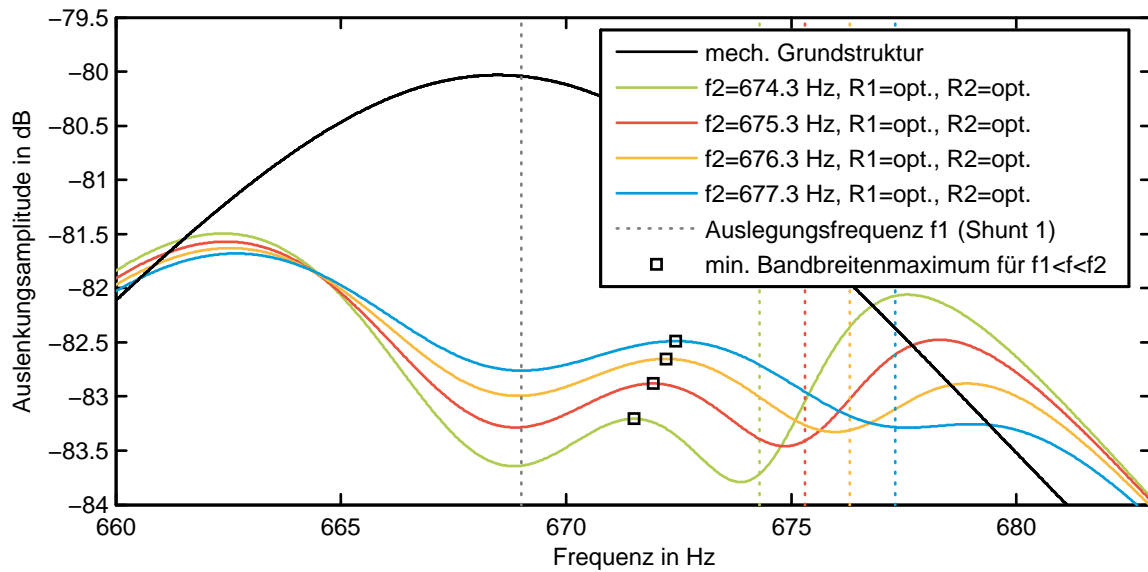


Abbildung 66: Minimale Bandbreitenmaxima für verschiedene Bandbreiten zwischen den Auslegungsfrequenzen zweier Shunts bei optimalen Widerstandswerten R_1 und R_2 .

4.6.3 Verfahren zur iterativen Auslegung eines verstimmten Multi-Shunt-Systems

Soll die Amplitudenreduktion über die gesamte Resonanzbreite erfolgen, wird die Reihenfolge der Auslegungsfrequenzen der eingesetzten Shunts aus den Kopplungsfaktoren der zugehörigen Flächenwandler abgeleitet. Die Bandbreite, über welche die Shunts eine tilgende Wirkung haben, ist proportional zum Kopplungsfaktor. Basierend auf der Tatsache, dass eine Resonanz durch den Einsatz eines einzelnen Shunts in zwei Resonanzen mit geringerer Amplitudenbreite aufgespalten wird (vgl. Abb. 62), erfolgt die Auslegung der Shunts so, dass die Auslegungsfrequenz des Shunts mit dem größten Kopplungsfaktor mittig bzgl. der übrigen Auslegungsfrequenzen liegt. Die Shunts mit den kleinsten Kopplungsfaktoren werden der kleinsten und größten Auslegungsfrequenz zugeordnet. Mit steigendem Kopplungsfaktor nähern sich die Auslegungsfrequenzen der übrigen Shunts der Auslegungsfrequenz des Shunts mit dem größten Kopplungsfaktor. Für den hier betrachteten Fall ergibt sich daraus die Reihenfolge $f_5 < f_1 < f_2 < f_6 < f_3 < f_4 < f_7$ (Shunt 5, Shunt 1, Shunt 2, Shunt 6, Shunt 3, Shunt 4, Shunt 7).

Die idealen Parameter der J zur Verfügung stehenden Shunts werden über das in Abb. 67 dargestellte iterative Verfahren ermittelt, welches sich grob in zwei Schritte gliedert. Zunächst werden Startwerte sowohl für die Auslegungsfrequenzen f_j als auch für die Widerstände R_j definiert. Die Startwerte für die Auslegungsfrequenzen basieren dabei auf den Ergebnissen des Systems mit identischen Auslegungsfrequenzen. Hierfür werden die zwei Frequenzen f_A und f_B verwendet, bei denen die ungetilgte Amplitudenkurve die maximalen Werte der getilgten Amplitude annehmen (vgl. Abb. 64).

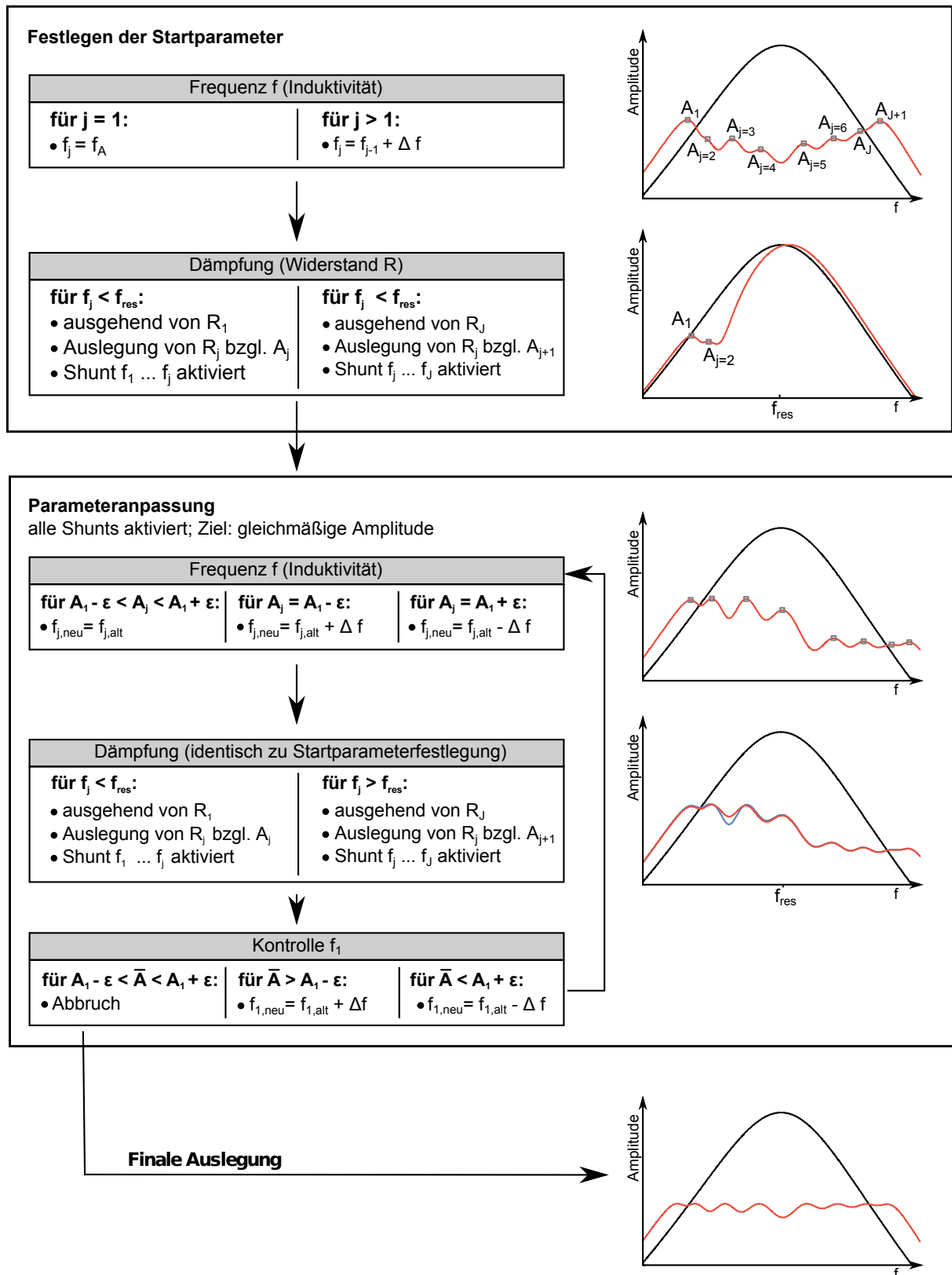


Abbildung 67: Ablaufschema des entwickelten iterativen Verfahrens zur optimalen Auslegung eines verstimmten Multi-Shunt-Systems mit J passiven elektrischen Schwingkreisen.

Der niedrigsten Startauslegungsfrequenz f_1 wird der Wert f_A zugewiesen, die Startauslegungsfrequenzen der übrigen Shunts ergeben sich unter Berücksichtigung der zugehörigen Kopplungsfaktoren k_j zu:

$$f_{j+1} = f_j + \frac{(f_B - f_A)}{J - 1} \cdot \frac{(k_{j-1} + k_j)^2}{(2\bar{k})^2} \quad \text{mit} \quad (49)$$

$$\bar{k} = \frac{\sum_{j=1}^J k_j}{J}$$

Die Startwerte für die Widerstände ergeben sich aus den im vorigen Kapitel erläuterten minimalen Bandbreitenmaxima zwischen benachbarten Shunts. In einem zweiten Schritt werden die Auslegungsfrequenzen und Widerstände in einem iterativen Prozess geändert, bis die optimale Amplitudenreduktion erreicht wird. Diese ist definiert durch eine identische Amplitudenhöhe aller minimalen Bandbreitenmaxima. Die hierfür benötigte kleine Frequenzänderung Δf ist variabel. Als Orientierung hat sich $\Delta f \approx 0,1 \cdot (f_{j+1} - f_j)$ bewährt. Die Änderung der Widerstände liegt im Bereich von ca. $\pm 20\%$ der Startwerte. In Abb. 68 und 69 sind die Ergebnisse einer solchen Auslegung bei Verwendung der vier Shunts mit den größten Kopplungsfaktoren bzw. allen sieben Shunts gezeigt. In Abb. 68 sind außer dem optimal getilgten Amplitudengang auch die Anteile der einzelnen Shunts dargestellt. Schon in diesem Fall gelingt eine höhere Amplitudenreduktion als bei Auslegung aller sieben Shunts auf die gleiche Frequenz. Werden alle Shunts verwendet, gelingt im Vergleich zur Auslegung mit identischer Auslegungsfrequenz eine um ca. 20% höhere Amplitudenreduktion von ca. 3,6 dB.

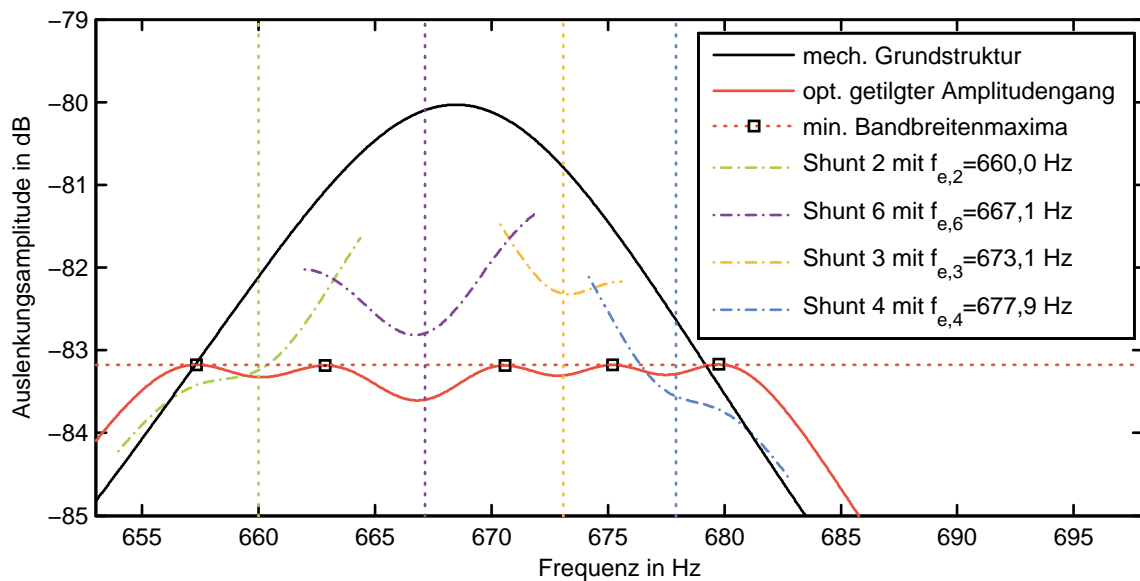


Abbildung 68: Maximal erreichbare Reduktion von ca. 3,2 dB bei Verwendung von vier Shunts mit unterschiedlichen Auslegungsfrequenzen.

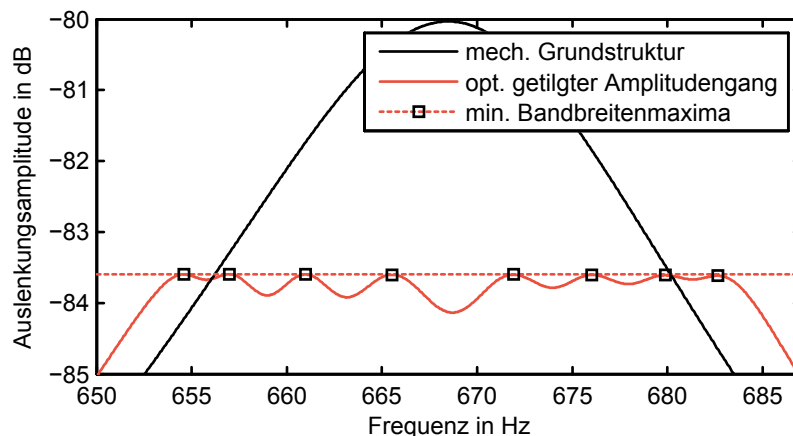


Abbildung 69: Maximal erreichbare Reduktion von ca. 3,6 dB bei Verwendung von allen sieben Shunts mit unterschiedlichen Auslegungsfrequenzen.

4.6.4 Fazit zum passiven Shunt Damping

Bei Verwendung eines piezoelektrischen Flächenwandlers als Bestandteil eines passiv tilgenden RLC-Schwingkreises hängt die erreichbare Amplitudenreduktion im wesentlichen vom Kopplungsfaktor des Flächenwandlers ab. Da diese für die einzelnen hier untersuchten Flächenwandler sehr gering sind, werden mehrere Flächenwandler parallel eingesetzt. Hierbei zeigt sich, dass die Verwendung des entwickelten Verfahrens zur Auslegung eines optimal verstimmten Shunt-Damping-Systems in den Simulationen zu deutlich höheren Amplitudenreduktionen führt als ein System mit mehreren Shunts mit der gleichen Auslegungsfrequenz. Das verstimmte System reagiert jedoch sehr empfindlich auf Änderungen in den Parametern der einzelnen RLC-Schwingkreise: Die flächenwandlerinhärenten Kapazitäten sind sehr klein und bedingen daher sehr große Induktivitäten für die hohen elektrischen Schwingkreisfrequenzen ω_e . Über Gyrator-Schaltungen ließen sich diese großen Induktivitäten für eine praktische Umsetzung realisieren. Das ungünstige Verhältnis der Kapazitäts- und Induktivitätswerte bedingt jedoch bereits bei geringen Schwankungen der Kapazitäten der Flächenwandler Änderungen der Schwingkreisfrequenz, die das optimal ausgelegte Gesamtsystem mit verstimmten RLC-Kreisen negativ beeinflussen. Dies und die mit diesem System geringen erreichbaren Amplitudenreduktionen von maximal 3,6 dB sprechen im Falle des Getriebeheulens gegen eine reale Umsetzung mit passivem Shunt-Damping.

Die beschriebene Sensitivität des verstimmten Shunt-Damping-Systems sinkt für niederfrequente Anwendungen aufgrund des geänderten Verhältnisses von L und C . Für solche Anwendungen ist das entwickelte Verfahren daher von größerem Interesse.

Da das passive System aufgrund der geringen Kopplungsfaktoren nur einen geringen Teil der gesamten mechanischen potentiellen Schwingenergie tilgt, wird im weiteren ein Ansatz mit aktiver Ansteuerung untersucht.

4.7 Störgrößenaufschaltung

Beim eben behandelten passiven Shunt Damping wird der direkte piezoelektrische Effekt genutzt, um dem System Energie zu entziehen. Mit diesem Ansatz gelingt jedoch nur eine geringe Amplitudenreduktion, weshalb im Folgenden der inverse piezoelektrische Effekt genutzt wird, um dem System über eine aktive Ansteuerung gezielt Energie zuzuführen, mit der die unerwünschte Verzahnungsanregung kompensiert wird. Hierfür wird als rein theoretischer Ansatz zunächst die Optimale Störgrößenaufschaltung verwendet [65, 66, 67]. Die damit durchgeführte Untersuchung erlaubt eine Aussage hinsichtlich erreichbarer Amplitudenreduktion unter alleiniger Berücksichtigung der Ausnutzung des verwendeten piezoelektrischen Materials. Hieraus werden Anforderungen an den Aufbau eines real verwendeten Flächenwandlers und damit zusammenhängend einen in einer realen Umsetzung benötigten Verstärker abgeleitet.

4.7.1 Grundlagen der Optimalen Störgrößenaufschaltung

Die Optimale Störgrößenaufschaltung basiert auf der Annahme, dass der Einfluss einer bekannten Störanregung auf ein bekanntes System durch eine zusätzlich aufgebrachte Kompensationsanregung minimiert werden kann. Zur Veranschaulichung ist in Abb. 70 ein einfaches System mit den verschiedenen im Weiteren benötigten Größen dargestellt.

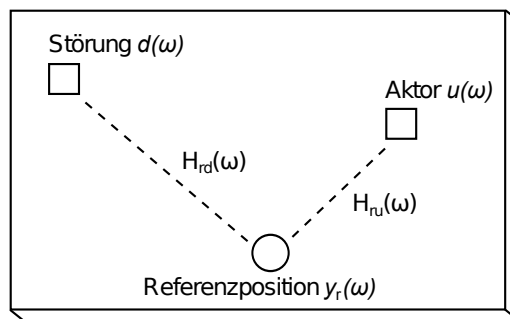


Abbildung 70: Einfache Struktur als Beispiel für die Optimale Störgrößenaufschaltung.

Hierin sind

- $d(\omega)$ die Störanregung,
- $u(\omega)$ die Kompensationsanregung
- $y_r(\omega)$ die Ausgangsgröße an einer Referenzposition,
- $H_{rd}(\omega)$ die Übertragungsfunktion von der Störanregung zur Referenz-Ausgangsgröße und
- $H_{ru}(\omega)$ die Übertragungsfunktion von der Kompensationsanregung zur Referenz-Ausgangsgröße.

Zugunsten der besseren Lesbarkeit wird im Weiteren auf das wiederholte Notieren der Frequenzabhängigkeit (ω) verzichtet.

Die Störanregung d verursacht an der Referenzposition die Ausgangsgröße

$$y_{r,d} = H_{rd}d. \quad (50)$$

Wirkt zusätzlich die Kompensationsanregung u , ergibt sich die Ausgangsgröße als:

$$y_{r,du} = H_{rd}d + H_{ru}u \quad (51)$$

Soll diese unter Berücksichtigung von, aufgrund begrenzter Aktorleistung, beschränkter Kompensationsanregung minimiert werden, wird als Gütemaß J die quadrierte Summe der Referenz-Ausgangsgröße und der über den Strafterm β gewichteten Kompensationsanregung definiert:

$$J = y_{r,du}^T y_{r,du} + \beta u^T u. \quad (52)$$

Nach Einsetzen von Gl. (51) in Gl. (52) ergibt sich das zu minimierende Gütemaß zu

$$J = d^T H_{rd}^T H_{rd} d + u^T H_{ru}^T H_{rd} d + d^T H_{rd}^T H_{ru} u + u^T H_{ru}^T H_{ru} u + \beta u^T u. \quad (53)$$

Die von β abhängige und hinsichtlich J optimale Aktor-Stellgröße u_{opt} wird nach [65] über die Ableitung:

$$\frac{\partial J}{\partial u_R} + i \cdot \frac{\partial J}{\partial u_I} = 2H_{ru}^T H_{rd} d + 2H_{ru}^T H_{ru} u + 2u\beta \stackrel{!}{=} 0 \quad (54)$$

ermittelt und ergibt:

$$u_{opt}(\beta) = -(H_{ru}^T H_{ru} + \beta I)^{-1} H_{ru}^T H_{rd} d. \quad (55)$$

Wird diese Gleichung für jede Frequenz eines interessierenden Frequenzbereichs gelöst, ergibt sich die frequenzabhängige optimale Stellgröße für eine bei der jeweiligen Frequenz wirkende Störanregung.

4.7.2 Implementierung am Getriebemodell

Im hier behandelten Fall ist die zu kompensierende Störanregung durch die drehzahlsynchrone Verzahnungskraft gegeben. Diese lässt sich über folgende Überlegung abschätzen: Das Getriebeheulen tritt bei einem Zugmoment von $M_{an} \approx 240 \text{ Nm}$ auf. Über die Übersetzung der

Festverzahnung $i_{FV} = \frac{29}{39}$ und den Teilkreisradius des treibenden Zahnrades des zweiten Gangs $R_{2,t} \approx 25 \text{ mm}$ ergibt sich eine auf das Zahnrad wirkende Tangentialkraft von

$$F_t = \frac{M_{an}}{i_{FV} R_{2,t}}, \quad (56)$$

woraus nach [2] über den Schrägungswinkel γ und den Eingriffswinkel α die gemittelte Zahnflankennormalkraft

$$F_N = \frac{F_t}{\cos(\alpha) \cos(\gamma)} \quad (57)$$

folgt. Für die Anregung des Getriebeheulens ist nur der schwellende Anteil dieser Kraft von Bedeutung, der sich durch die in Abhängigkeit des Eingriffswinkels variierende Zahnsteifigkeit ergibt. Unter der Annahme, dass der Schrägungswinkel einen festen Wert im Bereich $\gamma = 30 \pm 5^\circ$ aufweist und der Eingriffswinkel zwischen $\alpha = 20 \pm 5^\circ$ schwankt sowie die Zahnsteifigkeit maximal um $\pm 2\%$ variiert resultiert eine Amplitude der Störanregung von maximal $A_{\text{stör}} = 300 \text{ N}$. (Anmerkung: der Schrägungswinkel wird in der Fachliteratur üblicherweise mit β bezeichnet. Da diese Variable jedoch schon vergeben ist, wird in dieser Arbeit γ für den Schrägungswinkel verwendet.)

Die Systemeigenschaften des Getriebes inklusive applizierter Flächenwandler ist durch das FE-Modell bekannt. Die Kompensationsanregung erfolgt über die Flächenwandler. Über Gl. (55) wird die optimale externe Ladung Q_{ext} bestimmt, die, wie in Abb. 58 dargestellt, auf den Flächenwandler aufgebracht wird. Als Referenzposition wird wie im vorigen Kapitel diejenige Position gewählt, an welcher die Eigenform der durch die Verzahnungskraft angeregten Heul-Resonanz die maximale Auslenkung in y-Richtung aufweist. Die zu minimierende Ausgangsgröße entspricht eben dieser Auslenkung. In Kapitel 3.1 ist in Abb. 36 die Modellierung der Verzahnung über eine diskrete Steifigkeit dargestellt. Die hier berücksichtigte schwellende Verzahnungsanregung wird als sinusförmige Kraft in Zahnflankennormalenrichtung auf das treibende Zahnrad des 2. Gangs aufgebracht. Hierfür wird der Freiheitsgrad in dieser Richtung verwendet, wodurch weitere Transformationen entfallen.

4.7.3 Verwendung eines einzelnen Flächenwandlers

Zunächst wird die Optimale Störgrößenaufschaltung unter alleiniger Verwendung des Flächenwandlers Nr. 6 (vgl. Abb. 55) ausgeführt, da dieser den höchsten Kopplungsfaktor aufweist. In Abb. 71 sind die der Störübertragungsfunktion entsprechenden Frequenzgänge von der Verzahnungsanregung zur Referenzposition für das System ohne und mit Kompensationsanregung bei verschiedenen Straftermen dargestellt. Strenggenommen handelt es sich nicht um die Störübertragungsfunktionen, da die Kompensation nicht als interne Rückführung über einen Regler, sondern als zusätzlich wirkender Systemeingang unter Berücksichtigung der Gl. (55) und (51)

implementiert ist. Da die Kompensation jedoch unmittelbar von der Störung abhängt, kann Gl. (51) als Störübertragungsfunktion geschrieben werden:

$$\frac{y_{r,du}}{d} = \left(H_{rd} - H_{ru} (H_{ru}^T H_{ru} + \beta I)^{-1} H_{ru}^T H_{rd} \right). \quad (58)$$

Im Amplitudengang ist deutlich die unterschiedlich hohe Steuerbarkeit der verschiedenen Resonanzen zu erkennen. Die zweite Resonanz bei 220 Hz könnte durch eine Verzahnungsanregung bei dieser Frequenz offensichtlich stark angeregt, jedoch durch den Flächenwandler Nr. 6 nicht beeinflusst werden. In den übrigen Resonanzbereichen wird die größte Reduktion stets bei der Frequenz der maximalen Amplitude erreicht, was durch den H_{rd} -Term im Zähler der Gl. (55) verursacht wird. Der Phasengang ist für alle Varianten identisch, da die Kompensationsanregung als zusätzlicher Systemeingang implementiert ist und somit keinen Einfluss auf die Systemdynamik nimmt.

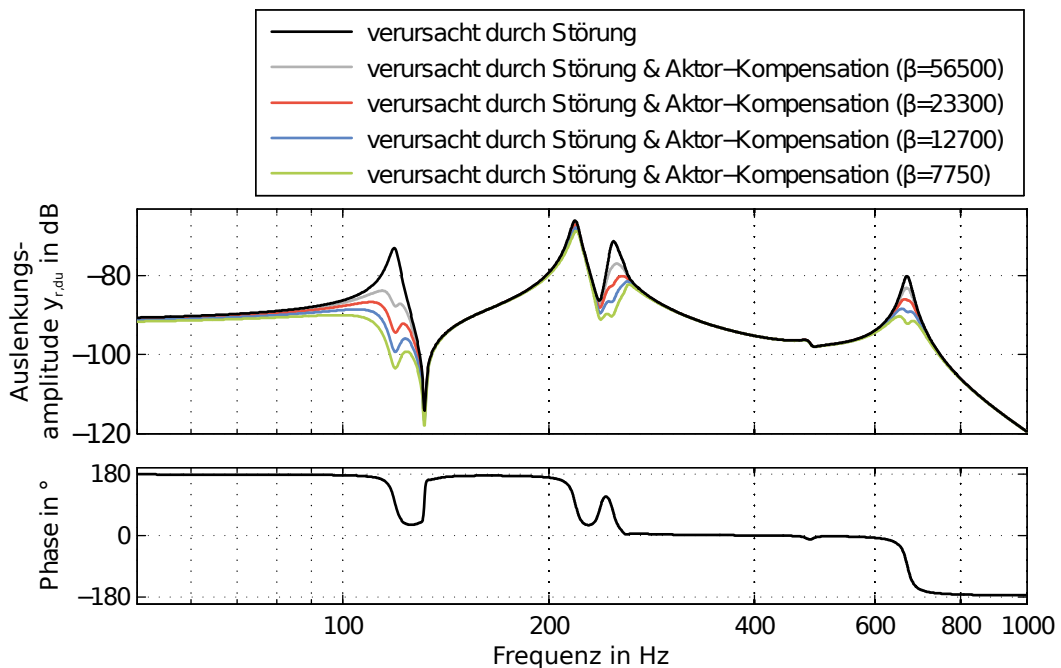


Abbildung 71: Störübertragungsfunktion ohne und mit Kompensation für verschiedene Strafterme β . Die Störanregung wirkt in Zahnflankennormalenrichtung des treibenden Zahnrades des zweiten Gangs. Die Kompensation erfolgt über den Flächenwandler Nr. 6 mit optimaler Kompensationsanregung nach Gl. (55) für verschiedene Strafterme β .

Für die beabsichtigte Reduktion des Getriebeheulens ist nur der in Abb. 72 gezeigte Frequenzbereich um 670 Hz relevant. Für diese Resonanz ist über den gesamten Resonanzbereich eine gute Beeinflussbarkeit gegeben. Die Strafterme β sind so gewählt, dass die höchste Amplitude um 3, 6, 9 und 12 dB reduziert wird.

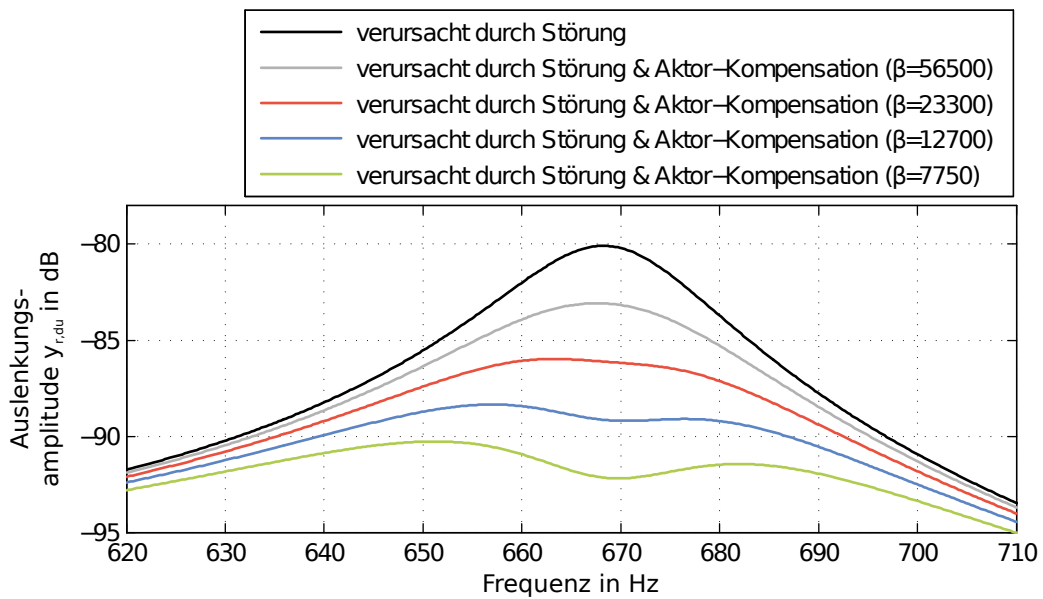


Abbildung 72: Störübertragungsfunktion im Bereich der Heul-Resonanz. Die Störangregung wirkt in Zahnflankennormalenrichtung des treibenden Zahnrades des zweiten Gangs. Die Kompensation erfolgt über den Flächenwandler Nr. 6 mit optimaler Kompensationsanregung für verschiedene Strafterme β .

In Abb. 73 ist die hierfür benötigte Stellgröße für verschiedene β dargestellt. Grundsätzlich führt ein größerer Strafterm zu niedrigeren maximalen Ladungen. Im Bereich der Resonanz bei 220 Hz werden die größten Ladungen des gesamten Frequenzbereichs gefordert, da hier aufgrund der Positionierung des Flächenwandler Nr. 6 nur eine sehr geringe Steuerbarkeit der zugehörigen Eigenform vorliegt. Die Phase des Kompensationssignals ist unabhängig von β .

Die dargestellten Verläufe im Frequenzbereich geben einen guten Einblick in das Systemgesamtvverhalten, erlauben jedoch nur eine begrenzte Aussage hinsichtlich benötigter Ansteuerungen der Flächenwandler bei einer praktischen Umsetzung. Diese ist für die Auslegung eines realen Systems eine wichtige Größe. Aus Simulationen im Zeitbereich geht direkt die über die verschiedenen Frequenzen summierte Gesamtspannung hervor, weshalb im weiteren Verlauf solche Simulationen verwendet werden.

Das Getriebeheulen wird durch die drehzahlsynchronen Verzahnungskräfte angeregt. In dem Betriebsbereich, in dem das Heulen auftritt, liegt also eine dominierende monofrequente Anregung mit einer Frequenz um 670 Hz vor, die es zu kompensieren gilt. Aus Abb. 74 ist ersichtlich, dass die hierfür benötigte Ladung ein Maximum bei ca. 668 Hz annimmt. Für die Abschätzung der maximalen Spannung und des daraus resultierenden elektrischen Feldes in der piezoelektrischen Keramik des Flächenwandlers wird im Weiteren von einer Anregung mit dieser Frequenz ausgegangen. Angelehnt an die normierte Darstellung der Frequenzgänge im Bode-Diagramm wird mit einer Anregungsamplitude von 1 N gerechnet. Die lineare Modellie-

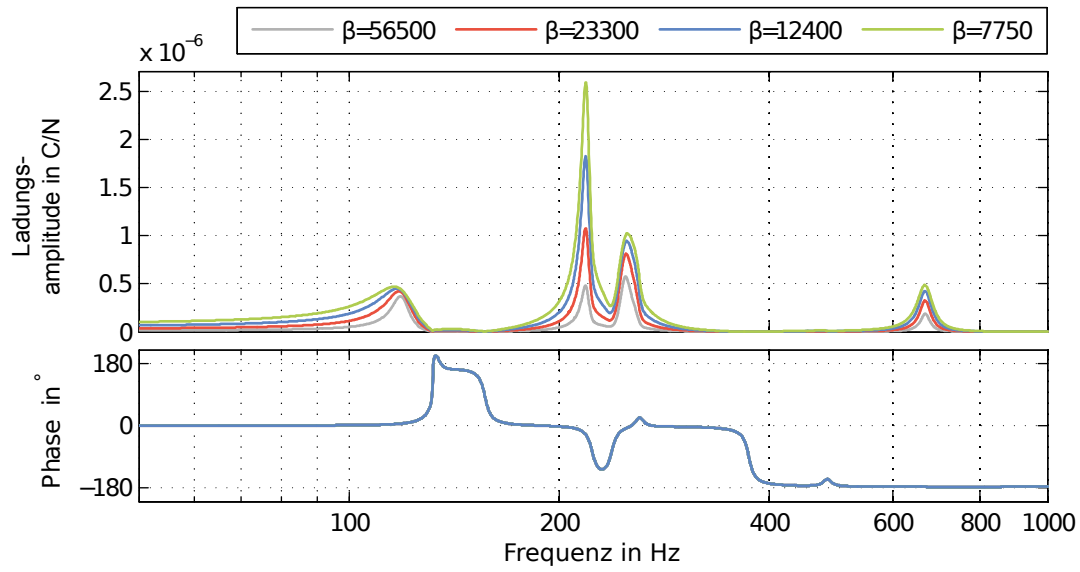


Abbildung 73: Optimales Kompensationssignal u_{opt} (Ladung) bei verschiedenen Straftermen β über den gesamte Frequenzbereich. Mit sinkendem β steigt die geforderte maximale Ladung.

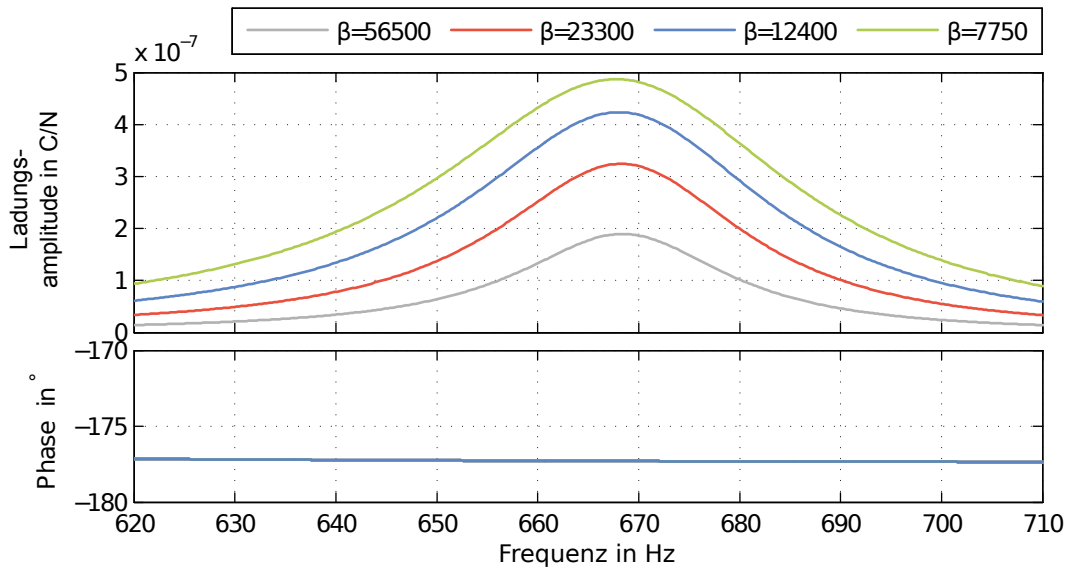


Abbildung 74: Optimales Kompensationssignal u_{opt} (Ladung) bei verschiedenen Straftermen β im Bereich der Heul-Resonanz. Mit sinkendem β steigt die geforderte maximale Ladung.

ung des Systemverhaltens erlaubt die Skalierbarkeit der damit ermittelten Werte. Die bei dieser Frequenz benötigte Kompensationsanregung $u_{opt}(f_{Heul})$ wird über Gl. (55) ermittelt und über

$$u_{opt}(f_{Heul}, t) = |u_{opt}(f_{Heul})| \cdot \sin(2\pi f_{Heul}t + \arg\{u_{opt}(f_{Heul})\}) \quad (59)$$

in den Zeitbereich transformiert.

In Abb. 75 sind eine Verzahnungsanregung mit einer Amplitude von 1 N, die daraus resultierende Auslenkung an der Referenzposition des passiven Systems sowie diese Auslenkungen bei zusätzlicher Kompensationsanregung bei verschiedenen Straftermen β und die zugehörigen an den Elektroden des Flächenwandlers anliegenden Spannungen dargestellt. Hierbei wird nur der eingeschwungene Zustand betrachtet. Zu erkennen ist, dass größere durch die Kompensationsanregung aufgebraachte Spannungsamplituden zu größeren Amplitudenreduktionen führen. Die auf die Auslenkungsamplitude des passiven Systems bezogene Amplitudenreduktion nimmt hierbei proportional mit der anliegenden Spannung zu. Das Anregungssignal und das anliegende Spannungssignal weisen einen leichten Phasenversatz zueinander auf, der sich durch die unterschiedlichen Phasenlagen der jeweils zugehörigen Übertragungsfunktionen ergibt. In Tabelle 11 sind die anliegenden Spannungsamplituden für verschiedene Strafterme und damit zusammenhängenden Amplitudenreduktionen aufgelistet.

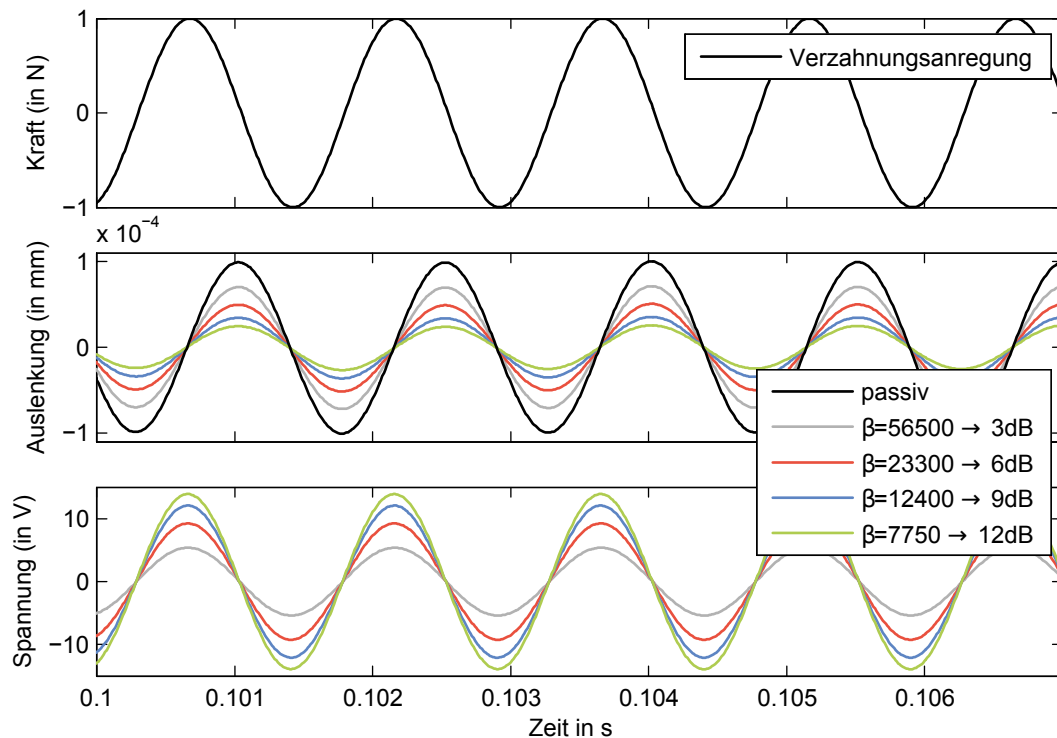


Abbildung 75: Verzahnungsanregung mit einer Amplitude von 1 N bei 668 Hz, resultierende Auslenkung und durch Kompensationsanregung reduzierte Auslenkungen sowie am Flächenwandler anliegende elektrische Spannungen im Zeitbereich im eingeschwungenen Zustand. Reduzierte Auslenkungen und Spannungen für verschiedene Strafterme β .

Tabelle 11: Benötigte Spannungen für verschiedene Amplitudenreduktionen bei einer auf 1 N normierten Anregung mit f_{Heul}

Amplitudenreduktion (in dB)	3	6	9	12
Amplitudenreduktion (relativ)	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{8}}$	$\frac{1}{4}$
benötigte Spannung (in V)	$\pm 5,4$	$\pm 9,2$	± 12	$\pm 13,9$

Die über das Kompensationssignal aufgebrachte Ladung resultiert aufgrund des kapazitiv wirkenden Flächenwandlers in einer an den Elektroden anliegenden Spannung U_{elek} , die, wie in Abb. 58 gezeigt, direkt als Systemausgang aus dem Modell abgegriffen wird. Über die Dicke des Flächenwandler h_0 wird die aus dieser Spannung resultierende Feldstärke

$$E = \frac{U_{elek}}{h_0} \quad (60)$$

ermittelt, mit der ein Maß der Ausnutzung des piezokeramischen Materials gegeben ist: Zum einen führt das Überschreiten einer maximalen Feldstärke zu irreversiblen Schädigungen des Materials, zum anderen hängt von der Feldstärke das Ansteuerverhalten der Keramik ab. In Tabelle 12 ist eine Unterteilung des Ansteuerverhaltens typischer piezoelektrischer Keramiken für unterschiedliche Feldstärkebereiche dargestellt (vgl. [68]). Hieraus geht hervor, dass der Großsignalbereich mit Feldstärken über ca. $|\pm 0,6|$ kV/mm zu vermeiden ist, wenn mäßig bis stark ausgeprägtes nichtlineares Aktorverhalten wie im vorliegenden Fall unberücksichtigt bleiben soll. Die geringen Nichtlinearitäten des Mittelsignalbereichs werden bewusst vernachlässigt, womit ein Kompromiss zwischen Modellierungsaufwand und Ergebnisqualität getroffen wird. Die in der Tabelle angegebenen Werte stellen Richtwerte dar und unterscheiden sich leicht je nach verwendetem Material.

Tabelle 12: Allgemeine Unterteilung des Ansteuerverhaltens piezoelektrischer Keramiken bei verschiedenen Feldstärken

	elektrische Feldstärke (in kV/mm)	Ansteuerverhalten
Kleinsignalbereich	$\pm 0,1$	nahezu linear
Mittelsignalbereich	$\pm 0,1$ bis $\pm 0,6$	geringes Hystereseverhalten
Großsignalbereich	$\pm 0,6$ bis $\pm 1,2$	mäßiges Hystereseverhalten
Großsignalbereich	$\pm 1,2$ bis $\pm 2,5$	starkes Hystereseverhalten

Unter diesen Randbedingungen ergibt sich bei alleiniger Verwendung des Flächenwandlers Nr. 6 aufgrund seiner für den Kopplungsfaktor optimalen Dicke von 2 mm nach Gl. (60) eine maximal zulässige Spannung von ± 1200 V. Hieraus folgt unter Verwendung der Werte aus Tabelle 11 für eine Störanregung mit einer Amplitude von 300 N eine maximale Reduktion von ca. 2,5 dB, was einer relativen Amplitudenreduktion auf ca. 0.75 der Ausgangsamplitude des passiven Systems entspricht. Mit dem rein passiven RLC-Kreis ist im Vergleich hierzu nur eine Reduktion von ca. 1,7 dB möglich (vgl. Abb. 63). Für eine praktische Umsetzung resultiert bereits aus diesem Ergebnis, dass mehr als ein Flächenwandler für eine signifikante Minderung des Getriebeheulens nötig ist.

Für die Abschätzung der benötigten Spannungen und erreichbaren Amplitudenreduktionen wurde in diesem Abschnitt von idealen Bedingungen ausgegangen. Die ermittelten Spannungen werden im nächsten Abschnitt verwendet, um Anforderungen an die benötigte Hardware für eine reale Umsetzung abzuleiten. In einer realitätsnahen Simulation werden die Eigenschaften dieser Hardware berücksichtigt.

4.7.4 Realitätsnahe Simulation des FxLMS

Eine reale Umsetzung der Optimalen Störgrößenaufschaltung ist aufgrund

- der nicht direkt messbaren Störanregung,
- des nicht experimentell bestimmbaren Übertragungsverhaltens der Störanregung zur Referenzposition H_{rd} und
- des nicht idealen Verhaltens der piezoelektrische Flächenwandler

nicht möglich. Um unter Berücksichtigung dieser Tatsachen eine Abschätzung einer realen Umsetzung zu geben, wird im folgenden der Filtered-x Least Mean Square (FxLMS) Algorithmus [65, 69, 70] unter Berücksichtigung von realitätsnäheren Eigenschaften des Aktors und sonstiger Regelkreiselementen untersucht. Der Aufbau des FxLMS-Regelkreises ist in Abb. 76 dargestellt.

Die grundsätzliche Idee des FxLMS-Algorithmus ist, wie bei der Optimalen Störgrößenaufschaltung, die Kompensation eines Störsignals d durch ein zweites Signal u . Anstelle des Störsignals wird jedoch ein dem Störsignal ähnliches Referenzsignal x_{ref} über ein Filter C mit adaptiven Filterkoeffizienten gewichtet. Für die Adaption der Filterkoeffizienten wird das Referenzsignal über ein Modell der Sekundärstrecke H_{ru}^* , welche der Übertragungsfunktion von Reglerausgang u zu Analog/Digital-Wandlerausgang $y_{r,du}^*$ entspricht, gefiltert. Mit dem so gefilterten Referenzsignal x_{ref}^* und der gemessenen Auswirkung $y_{r,du}^*$ der Störung und des Kompensationssignals an einer Referenzposition werden die Filtergewichte adaptiert, um den Auswirkungen der Störanregung entgegenzuwirken.

Im Falle des Getriebeheulens ist bekannt, dass die Störanregung durch die Verzahnung des zweiten Gangs verursacht wird. Das Referenzsignal kann daher beispielsweise aus dem aktuellen

bestimmt [72]. Mittels des Vergessensfaktors $\nu = 1 - \epsilon$, mit $\epsilon \ll 1$, wird zum einen sichergestellt, dass auch konvergierte Filtergewichte noch auf Änderungen der Störanregung reagieren, zum anderen wird bei konstanter Störanregung verhindert, dass die Filtergewichte aufgrund des unvermeidlichen Restfehler $y_{r,du}^*$ einem Drift unterliegen. Die Schrittweite μ des adaptiven Algorithmus beeinflusst sowohl dessen Konvergenzgeschwindigkeit als auch dessen Stabilität. Wird sie zu groß gewählt, wachsen die Filtergewichte über alle Grenzen, wird sie zu klein gewählt, erfolgt die Adaption der Filtergewichte zu langsam, um auf mögliche Anregungsänderungen zu reagieren. Angelehnt an die Stabilitätsgrenze im Eingrößenfall wird sie nach [70] über

$$\mu = \frac{\alpha_{LMS}}{\max \left\{ |H_{ru}^*|^2 \right\}} \quad (67)$$

bestimmt. Für die Konstante $\alpha_{LMS} = 4 \cdot 10^{-3}$ werden im untersuchten Fall gute Konvergenzgeschwindigkeiten bei geringem Überspringen der Filtergewichte erzielt.

In $y_{r,du}^*(t_k)$ werden neben den Übertragungsverhalten des Anti-Aliasing-Filters und des Analog-Digital-Wandlers auch eventuelles Sensorrauschen sowie mögliche sonstige Störanregungen auf das Getriebe berücksichtigt. Das Anti-Alias-Filter entspricht einem Tiefpassfilter mit der Eckfrequenz der halben Abtastfrequenz: $\omega_{e,AA} = \frac{f_s}{2}$. Damit wird im Bereich der Heul-Frequenz ein Phasenverlust von ca. 4° in die Sekundärstrecke eingebracht. Der Amplitudenabfall in diesem Frequenzbereich ist vernachlässigbar. Der A/D-Wandler wird durch eine Padé-Approximation eines Totzeitgliedes mit der Totzeit $T_t = \frac{1}{f_s}$ modelliert, welche ohne Amplitudenabfall einen Phasenverlust von ca. 12° im Bereich der Heul-Frequenz einbringt. Insbesondere der Phasenverlust wird im Modell der Sekundärstrecke berücksichtigt, um, wie später gezeigt wird, die Robustheit des Algorithmus zu bewahren.

Die Frequenz $\dot{\varphi}_x$ der Störanregung wird über die vom Drehgeberensierte Eingangswelldrehzahl $\dot{\varphi}_{W,an}$ und die bekannten Übersetzungsverhältnisse und Zähnezahlen ermittelt.

Da im Betrieb eines Getriebes neben der hier behandelten Verzahnungsanregung immer auch andere Störanregungen vorhanden sind, werden diese ebenfalls im Summationsblock vor dem Sensor berücksichtigt. Im Falle des Getriebeheulens dominiert die Verzahnungsanregung und damit die Auslenkung, die der Heul-Eigenform zugeordnet werden kann. Daher wird die Amplitude dieser zusätzlichen Störungen deutlich unterhalb der durch die Verzahnungsanregung verursachten Amplitude liegen.

Das Ausgangssignal $u(t_k)$ des Filters C wird durch das Verhalten der Verstärker-Flächenwandler-Kombination deutlich beeinflusst. Charakteristisch für das Verhalten von Verstärkern, die mit kapazitiv wirkenden Aktoren eingesetzt werden, ist der Einfluss der kapazitiven Last auf die resultierende Bandbreite des Verstärkers. Je größer die angeschlossene Last ist, desto geringer ist die Bandbreite, bis zu welcher der Verstärker die maximale Spannung ausgibt.

Den Ergebnissen der Optimalen Störgrößenaufschaltung zufolge ist für eine Amplitudenreduktion von 6 dB bei einer Anregung von 1 N mit der Heul-Frequenz eine Spannung von ca. $\pm 9,2$ V notwendig (vgl. Tab. 11), wenn der Flächenwandler aus einer einzelnen Schicht der Dicke $h_0 = 2$ mm besteht. Aufgrund der linearen Skalierbarkeit der Ergebnisse erfordert demnach eine Anregung mit 300 N eine Spannung von $U_0 \approx 2750$ V für die gleiche Amplitudenreduktion. Dies hat zwei Konsequenzen:

1. entspricht dies einem elektrischen Feld von ca. $\pm 1,3$ kV/mm, welches im Großsignalbereich liegt, in dem piezoelektrische Keramiken ausgeprägtes nichtlineares Ansteuerverhalten zeigen (vgl. Tabelle 12).
2. gibt es kaum Verstärker für piezoelektrische Flächenwandler, die bei diesen Frequenzen so hohe Spannungen liefern. Wird außerdem, wie im Automotive-Bereich üblich, eine maximale Verstärkereingangsspannung von 12 V gefordert, wird die Auswahl weiter eingeschränkt.

Der erste Punkt kann umgangen werden, indem statt eines einzelnen Flächenaktors mehrere Flächenwandler für die Kompensation verwendet werden. Dadurch sinkt die von jedem Aktor geforderte Kraft, wodurch auch die benötigte Feldstärke und damit der Einfluss der Nichtlinearitäten sinkt. Ein Alternative ist die Verwendung von Verstärkern, welche das Hystereseverhalten im Großsignalbereich ausregeln und somit den linearen Betrieb bei höheren Feldstärken ermöglichen. Beides wird in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht weiter ausgeführt, da das grundsätzliche weitere Vorgehen auch bei Einsatz mehrerer Flächenwandler oder eines geregelten Verstärkers erhalten bleibt. Die Nichtlinearitäten werden dennoch im Weiteren vernachlässigt, da sie für die Gesamtbeurteilung und eine praktische Umsetzung bei Berücksichtigung der vorgeschlagenen Abhilfen keinen wesentlichen Einfluss auf die erzielten Ergebnisse haben.

Die zweite Schwierigkeit wird durch einen im Folgenden erläuterten alternativen, mehrschichtigen Aufbau des Flächenwandlers gelöst. Hieraus ergibt sich ein Zielkonflikt zwischen benötigter Spannungsamplitude und möglicher Bandbreite. Zunächst wird die Tatsache ausgenutzt, dass durch die Verwendung von s Keramikschichten der Dicke $h_s = \frac{h_0}{s}$, die selbe elektrische Feldstärke

$$E = \frac{U_0}{h_0} = \frac{U_s}{h_s} \quad \text{mit } U_s = \frac{U_0}{s} \quad (68)$$

bei einer geringeren Spannung erreicht wird. Werden diese Schichten in einer Parallel-Schaltung angeordnet, werden mit U_s die gleichen Aktorkräfte erreicht wie mit dem einschichtigen Flächenwandler und der hohen Spannung U_0 . Die einzelnen Schichten verhalten sich wie parallelgeschaltete Kondensatoren mit der Kapazität

$$C_s = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r,33}^T A}{h_s}. \quad (69)$$

Die Gesamtkapazität des Flächenwandler ergibt sich zu

$$C_{ges} = \sum_{k=1}^s C_k. \quad (70)$$

Aus der mit der Schichtdicke abnehmenden benötigten Spannung bei gleichzeitig steigender Gesamtkapazität ergibt sich der angekündigte Zielkonflikt, wie in Abb. 77 gezeigt ist: Dargestellt ist das als Tiefpassfilter 2. Ordnung modellierte, typische Verhalten eines Verstärkers mit angeschlossener kapazitiver Last. Lastfrei weist der Verstärker eine Bandbreite von mehreren kHz auf, wird jedoch eine Last angeschlossen, sinkt die Bandbreite schnell auf einen Bereich von unter einem kHz. Die minimale Schichtdicke ist daher durch die resultierende Gesamtkapazität, mit welcher der Verstärker an der gewünschten Frequenz noch ausreichend Spannung stellen kann, begrenzt.

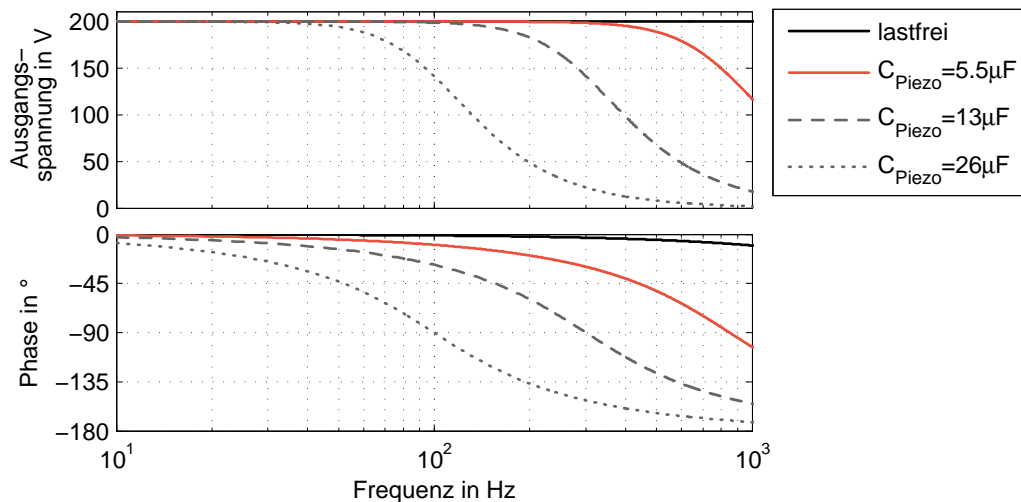


Abbildung 77: Modelliertes typisches Verstärkerverhalten bei verschiedenen angeschlossenen Lasten in Form von Kapazitäten der angesteuerten piezoelektrischen Flächenwandler. Mit steigender Kapazität sinkt die Bandbreite, bis zu welcher der Verstärker die maximale Spannung ausgibt.

Für den hier behandelten Fall wird daher eine Schichtdicke von $h_s = 0,15$ mm gewählt. Daraus resultiert eine Gesamtkapazität von $C_{ges} \approx 4,5 \mu\text{F}$, mit welcher der ausgewählte Verstärker bis zur Störfrequenz nahezu seine maximale Amplitude von 200 V stellen kann. Im bipolaren Betrieb folgt daraus eine maximal erzeugbare Feldstärke von $E_{max} \approx \pm 0,65$ kV/mm, wodurch eine gute Materialausnutzung bei geringem Hystereseverhalten vorliegt.

4.7.5 Ergebnisse des FxLMS-Algorithmus

In den Abbildungen 78 bis 83 sind die Ergebnisse verschiedener Simulationen des FxLMS-Algorithmus dargestellt: Abbildung 78 zeigt den direkten Vergleich des Systems ohne Kompen-

sation und des Systems mit aktivem Filter bei idealem Systemverhalten. Ohne Kompensation verursacht eine Störanregung von 1 N im eingeschwungenen Zustand eine maximale Auslenkungsamplitude an der Referenzposition von ca. $0,1 \mu\text{m}$ (obere Abbildung). Wird der Filter aktiviert, konvergieren die Filtergewichte innerhalb von 0,08 s auf 95% ihres Endwertes. Das Konvergenzverhalten der Filterkoeffizienten entspricht hierbei dem Verlauf der Einhüllenden in der unteren Abbildung. Beim dargestellten idealen Systemverhalten wird eine nahezu vollständige Kompensation der Verzahnungsanregung erreicht. Die minimal verbleibenden Schwingungen resultieren aus dem Vergessensfaktor bei der Koeffizientenbestimmung.

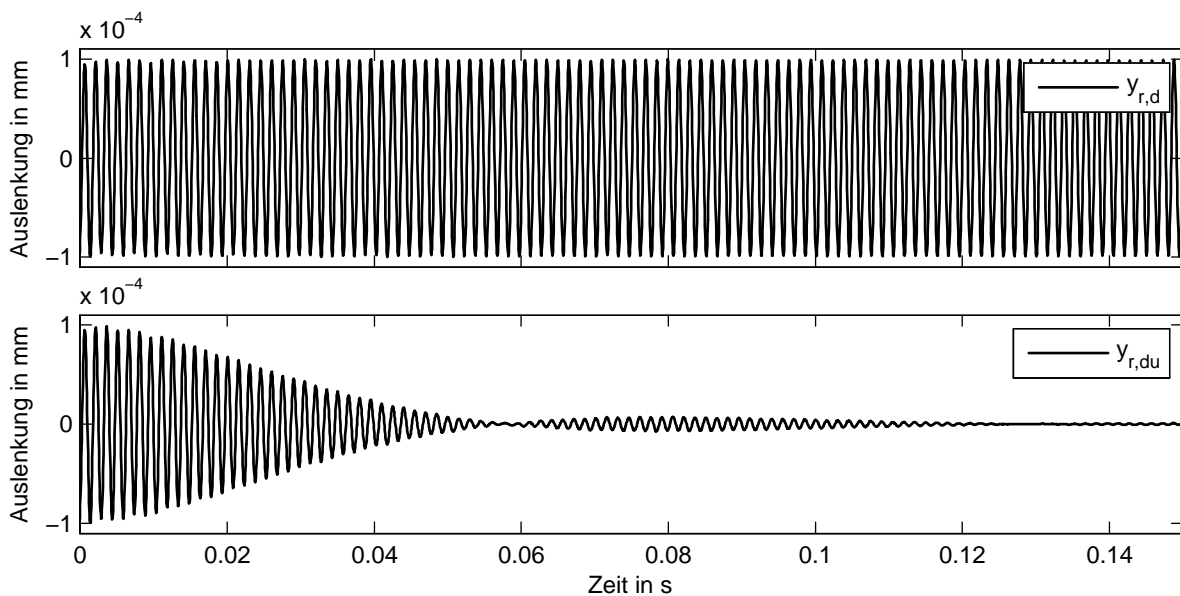


Abbildung 78: Durch Störung verursachte Amplitude und erzielbare Amplitudenreduktion bei idealem Regelkreisverhalten. Nach ca. 0,08 s sind die Filtergewichte auf 95 % ihres Endwertes konvergiert.

Werden (wie in Abb. 79) zusätzlich zur Verzahnungsanregung stochastische Störungen berücksichtigt, die an der Referenzposition Auslenkungen in Höhe von 20 % der durch die Verzahnungsanregung verursachten Amplitude entsprechen, zeigt sich die Robustheit des Algorithmus hinsichtlich der erreichbaren Kompensation: Die Auswirkungen der Verzahnungsanregung werden weiterhin nahezu vollständig kompensiert. Lediglich die den stochastischen Störungen entsprechenden Auslenkungen bleiben erhalten. Die Konvergenzdauer der Filterkoeffizienten bleibt von der zusätzlichen Störung ebenfalls nahezu unberührt.

Aus der Bestimmung der Schrittweite μ nach Gl. (67) erschließt sich unmittelbar der Einfluss von Amplitudenfehlern im Modell der Sekundärstrecke H_{ru}^* :

- Unterschätzte Amplituden führen zu größeren Schrittweiten, was zu höherem Überschwingen der Filtergewichte und damit größeren Konvergenzdauern führt (vgl. Abb. 80). Im schlimmsten Fall resultiert aus einer deutlich unterschätzten Amplitude daher die Instabilität des Algorithmus.

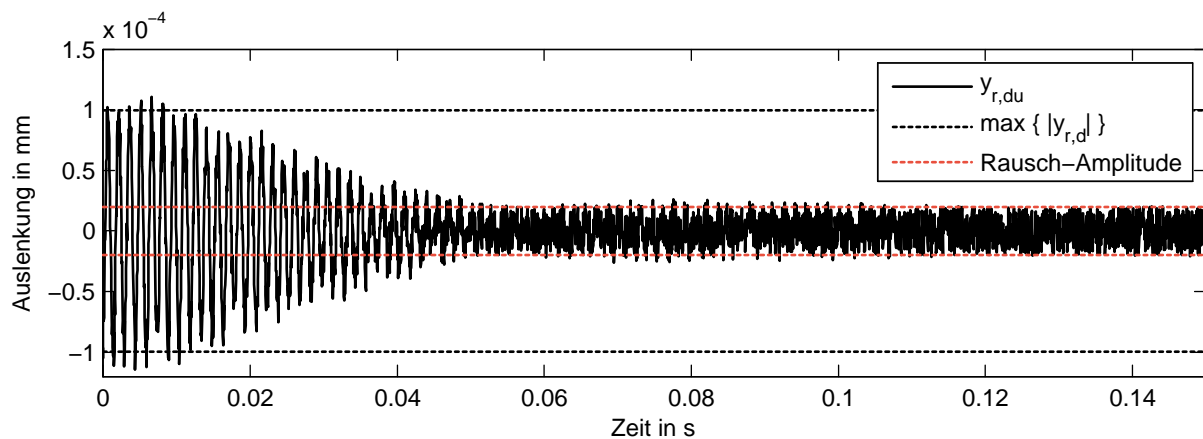


Abbildung 79: Erzielbare Amplitudenreduktion bei einer Rauschamplitude von 20 %. Die verbleibende Auslenkungsamplitude konvergiert gegen die Rauschamplitude.

- Überschätzte Amplituden bedingen kleinere Schrittweiten, welche zunächst nur die Konvergenzgeschwindigkeit verringern (vgl. Abb. 81), im Extremfall jedoch dazu führen, dass die Filterkoeffizienten nicht schnell genug auf Änderungen der Störanregung reagieren oder gar nicht mehr konvergieren, was zu deutlichen Einbußen in der Kompensation führt.

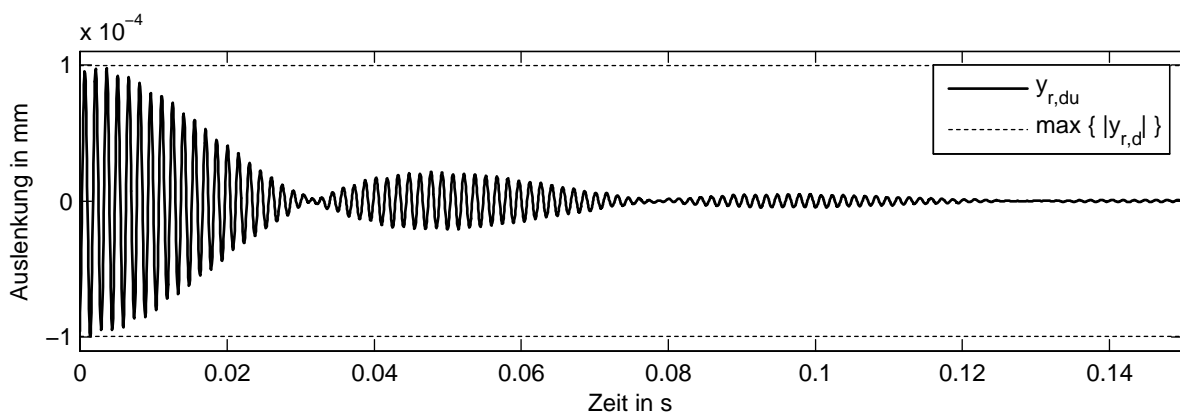


Abbildung 80: Erzielbare Amplitudenreduktion bei einer um 50 % unterschätzten Amplitude der Sekundärstrecke: Deutliches Überschwingen der Filtergewichte bei minimal gesteigerter Konvergenzdauer (Erreichen der 95 % Marke nach ca. 0,9 s).

Wird die Schrittweite mit ausreichend Abstand zur Stabilitätsgrenze festgelegt, ist der Einfluss von Amplitudenfehlern im Modell der Sekundärstrecke unkritisch. Wesentlich sensibler reagiert der Algorithmus auf Phasenfehler im Modell der Sekundärstrecke: Dieser Einfluss ist in Abb. 82 deutlich darin zu erkennen, dass die Konvergenzdauer bei einem Phasenfehler von 30 % bereits mehr als doppelt so groß ist. Ebenso wirkt sich ein Phasenfehler von -30 % aus. Steigende Phasenfehler führen zunächst zu einer Abnahme der erreichbaren Amplitudenreduktion bis sie

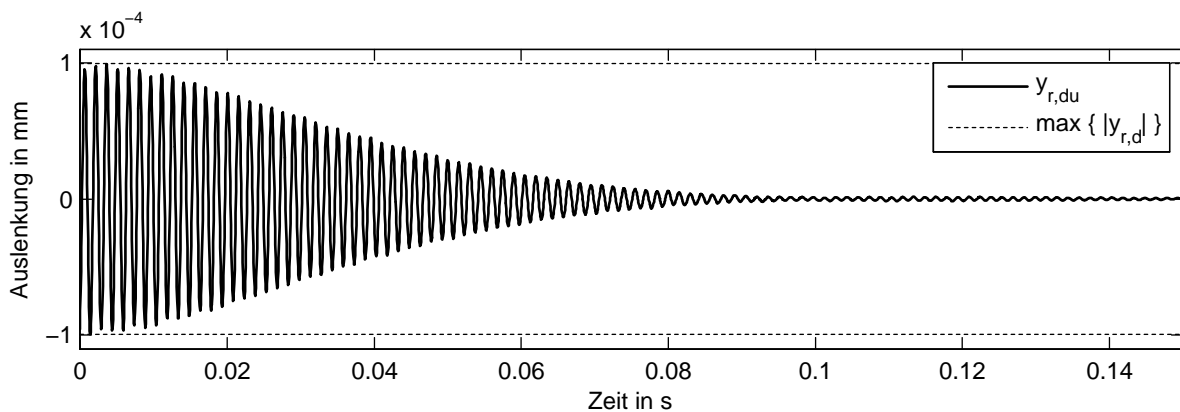


Abbildung 81: Erzielbare Amplitudenreduktion bei einer um 50 % überschätzten Amplitude der Sekundärstrecke. Minimales Überschwingen bei verringerter Konvergenzgeschwindigkeit.

nach [73] ab einem betragsmäßigen Phasenfehler von mehr als 90° zwangsläufig zur Instabilität des Algorithmus führen. Diese obere Grenze gilt jedoch nur für eine hierfür optimale Schrittweite; der bereits genannte Einfluss der Amplitudenfehler auf die Schrittweite und Forderungen an die Konvergenzgeschwindigkeit führt in praktischen Anwendungen zu niedrigeren Grenzen der tolerierbaren Phasenfehler.

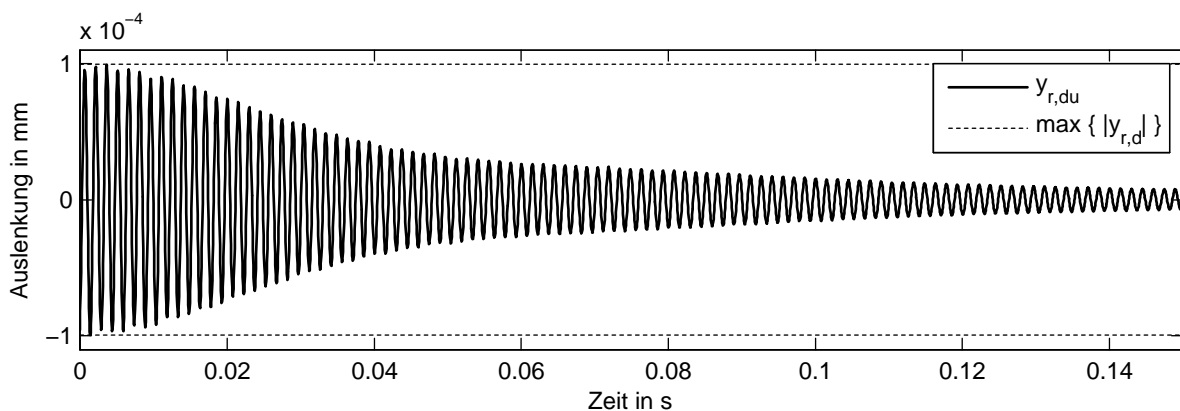


Abbildung 82: Erzielbare Amplitudenreduktion bei einer Phasendifferenz zwischen Sekundärstrecke und Modell der Sekundärstrecke von 30° . Deutlich erhöhte Konvergenzdauer auf 0,17 s bis 95 % Marke erreicht ist.

In Abb. 83 ist das Systemverhalten mit kombinierten Unsicherheiten dargestellt. Hierin sind stochastische Störungen sowie Amplituden- und Phasenfehler des Modells der Sekundärstrecke berücksichtigt. Dennoch können deutliche Amplitudenreduktionen erreicht werden. In Abb. 84 ist die für dieses System benötigte Elektrodenspannung dargestellt. Mit Aktivierung des Filters steigt die Einhüllende der Spannungsamplitude zunächst schnell an und erreicht nach einem leichten Überschwingen ihren stationären Wert von ca. 20 V pro 1 N Störanregung. Hieraus ergibt sich bei einem einschichtigen Aufbau des Flächenwandlers mit $h_0 = 2 \text{ mm}$ und einer

Störamplitude von 300 N ein elektrisches Feld von $\pm(300 \text{ N} \cdot 20 \frac{\text{V}}{\text{N}})/2 \text{ mm} = \pm 3 \text{ kV/mm}$, welches zu einer nahezu vollständigen Kompensation des Störsignals führt (vgl. Abb. 83). Wie bereits erwähnt, ist mit dem ausgewählten Verstärker jedoch selbst bei alternativem vielschichtigem Aufbau des Flächenwandlers nur eine maximale Feldstärke von 650 V/mm erreichbar. Eine vollständige Kompensation einer Störanregung mit einer Amplitude von 300 N ist demnach mit dem einzelnen hier simulierten Flächenwandler und ausgewähltem Verstärker nicht möglich. Der hier simulierte Flächenwandler ermöglicht die vollständige Kompensation einer Störanregung von maximal 65 N, was bezogen auf die 300 N einer Reduktion von 2,1 dB entspricht.

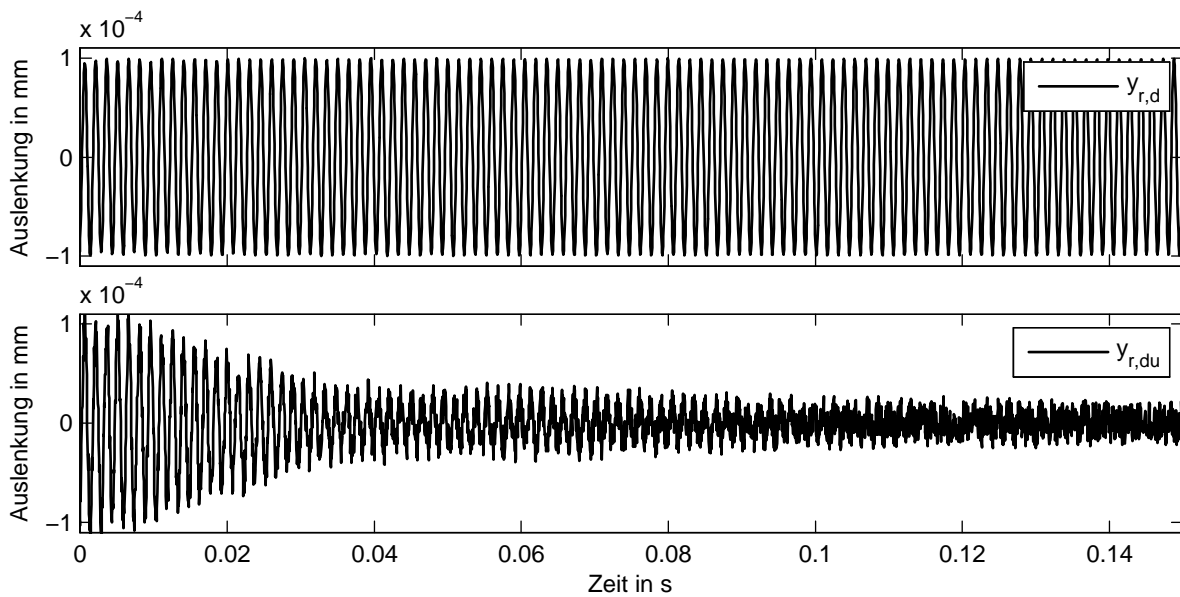


Abbildung 83: Resultierende Amplituden bei einer auf 1 N normierten Störanregung bei einem Regelkreis mit einer berücksichtigten Rauschamplitude von 20 % der Störauslenkungsamplitude, einer um 30 % unterschätzten Amplitude und einer Phasendifferenz von 20° zwischen Modell und tatsächlicher Sekundärstrecke.

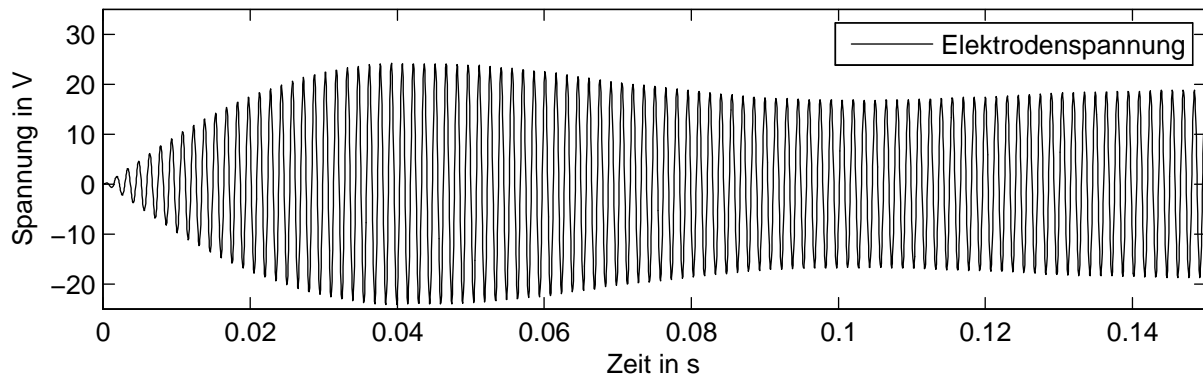


Abbildung 84: Benötigte Elektrodenspannung zur Kompensation einer auf 1 N normierten Störanregung bei einem Regelkreis mit einer berücksichtigten Rauschamplitude von 20 % der Störauslenkungsamplitude, einer um 30 % unterschätzten Amplitude und einer Phasendifferenz von 20° zwischen Modell und tatsächlicher Sekundärstrecke.

4.7.6 Konsequenzen für eine praktische Umsetzung

Für eine praktische Umsetzung der aktiven Kompensation der Verzahnungsanregung existieren verschiedene Möglichkeiten. Die Verwendung mehrerer Flächenwandler führt bei der mit dem Verstärker maximal erreichbaren Feldstärke zu höheren Reduktionen, da sich die Wirkungen der einzelnen Flächenwandler unter Vernachlässigung der Flächenwandler-Grundfläche näherungsweise proportional zu ihren Kopplungsfaktoren addieren. Unter dieser Annahme ergibt sich bei Verwendung aller sieben Flächenwandler mit den in Tabelle 10 gelisteten Kopplungsfaktoren eine maximal kompensierbare Störanregung von näherungsweise

$$F_{komp,max} \approx \frac{65 \text{ N}}{k_6} \cdot (k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7) \approx 300 \text{ N}. \quad (71)$$

Diese Amplitude entspricht der maximalen Amplitude der Störanregung, womit theoretisch eine vollständige Unterdrückung des Getriebeheulens möglich ist. Eine vollständige Kompensation der Verzahnungsanregung ist in praktischen Anwendungen aufgrund des stets vorhandenen Grundgeräuschpegels und dessen maskierender Wirkung jedoch nicht erforderlich.

Unberücksichtigt bleibt bei der Abschätzung nach Gl. (71) der Einfluss der Grundfläche der verschiedenen Flächenwandler. Da diese mit Ausnahme des Flächenwandlers Nr. 1 eine geringere Grundfläche haben als Flächenwandler Nr. 6, ist bei diesen nach Gl. (70) eine geringere Schichtdicke als 0,15 mm möglich, ohne eine Kapazität zu erreichen, welche die maximale Spannung des Verstärkers wesentlich absenkt. Dies wiederum ermöglicht höhere Feldstärken bei diesen Flächenwandlern und damit eine größere Materialausnutzung. Im Gegenzug erfor-

dem die höheren Feldstärken gegebenenfalls die Berücksichtigung des damit einhergehenden stärker ausgeprägten Hystereseverhaltens.

Ein alternativer Ansatz zum Erreichen höherer Feldstärken ist die getrennte Ansteuerung verschiedener Schichten innerhalb eines Flächenwandlers. Wird beispielsweise jeweils die Hälfte der Schichten des Flächenwandlers separat elektrisch kontaktiert und angesteuert, kann aufgrund der sinkenden Kapazität die Schichtdicke reduziert werden, womit höhere Feldstärken erreicht werden. Auch in diesem Fall muss das Hystereseverhalten entsprechend berücksichtigt werden. Unter Beibehaltung des Kopplungsfaktors führt die beidseitige Applikation der Flächenwandler auf die Versteifungsrippen zu einem ähnlichen Effekt. Hierbei ist dann keine getrennte elektrische Kontaktierung innerhalb eines Multi-Layer-Flächenwandlers nötig.

Die praktische Implementierung des FxLMS-Algorithmus ermöglicht aufgrund der Schmalband-Charakteristik des Getriebeheulens einen deutlichen Vorteil gegenüber der Anwendung bei breitbandigen Störanregungen: Die Performance des Algorithmus steigt mit der Genauigkeit des hinterlegten Modells der Sekundärstrecke. Im Unterschied zu den bei der zuvor behandelten Optimalen Störgrößenaufschaltung benötigten Übertragungsfunktionen kann diese Strecke experimentell identifiziert werden. Wird der Algorithmus so implementiert, dass er nur bei eingelegtem zweiten Gang und im relevanten Drehzahlbereich aktiv ist, genügt ein Modell der Sekundärstrecke für den Frequenzbereich, in dem dann die Verzahnungsanregungsfrequenz liegt. Damit einher geht eine höhere Modellgenauigkeit und damit eine bessere Performance. Dies, kombiniert mit der Robustheit des Algorithmus gegenüber Phasen- und Amplitudenfehlern im Sekundärmodell, lässt auch bei einer praktischen Umsetzung hohe erzielbare Amplitudenreduktionen erwarten.

4.8 Vergleich der erreichbaren Amplitudenreduktionen

In Tabelle 13 sind die ermittelten maximalen Amplitudenreduktionen aufgelistet, die mit den verschiedenen untersuchten Ansätzen erreicht werden: Das entwickelte verstimmte Multi-Shunt-Damping ist dem herkömmlichem Multi-Shunt-Damping deutlich überlegen, erreicht im Fall des Getriebeheulens jedoch keine ausreichende Reduktion, um eine praktische Umsetzung dieses Systems zu empfehlen.

Wie zu erwarten, führt unabhängig von aktiver oder passiver Verwendung der Einsatz mehrerer Flächenwandler zu größeren Reduktionen. Hierbei ist die dadurch zusätzlich erreichbare Reduktion bei aktiver Ansteuerung wesentlich höher als bei passiver Verwendung. Dies liegt an dem jeweiligen genutzten piezoelektrischen Effekt. Während bei passiver Verwendung aufgrund des genutzten direkten piezoelektrischen Effekts die durch den ersten Shunt bereits erreichte Reduktion zu einer schwächeren Ladungsinduktion in den weiteren Flächenwandlern führt, können die Flächenwandler bei Verwendung des inversen piezoelektrischen Effekts unabhängig voneinander aktiv bis zu einer maximalen Feldstärke angesteuert werden. Die Optimale Störgrößenaufschaltung weist dabei aufgrund der als ideal angenommenen Randbedingungen höhere

Reduktionen als die Umsetzung mit dem FxLMS-Algorithmus auf. Eine praktische Umsetzung ist aus den in Kapitel 4.7.4 genannten Gründen dennoch nur mit dem FxLMS möglich. Auch unter realistischen Annahmen sind hiermit hohe Reduktionen erreichbar.

Tabelle 13: Vergleich der erreichbaren Amplitudenreduktionen

	passiv	passiv	aktiv	aktiv
	monofrequentes	verstimmtes	Optimale	
Methode	Shunt-Damping	Multi-Shunt-Damping	Störgrößenaufschaltung	FxLMS
FW Nr. 6	1,7 dB	-	2,5 dB	2,1 dB
alle 7 FW	2,9 dB	3,6 dB	-	≫ 2,1 dB

Der im hier verwendeten elektromechanisch gekoppelten Modell vernachlässigte Einfluss der Polymerummantelung der Flächenwandler sowie der Klebeschicht zwischen Flächenwandler und Getriebegehäuse wird bei einer praktischen Umsetzung zu einer Abschwächung der hier simulierten Ergebnisse führen. Das relative Verhältnis der verschiedenen Methoden wird jedoch erhalten bleiben. Weiter ist diese Abschwächung unkritisch, da eine vollständige Kompensation der Verzahnungsanregung in praktischen Anwendungen aufgrund des stets vorhandenen Grundgeräuschpegels und dessen maskierender Wirkung nicht gefordert wird. In [74] wird beispielsweise eine Reduktion des beim Getriebeheulen vorhandenen Schalldruckpegels um 6 dB als Erfolg beschrieben.

Eine Größe zur Beurteilung der Schallabstrahlung eines Körpers stellt die abgestrahlte Schallleistung dar. Im Gegensatz zum Schalldruck ist diese Größe rein systemabhängig und damit unabhängig von der Entfernung des Empfängers von der Quelle. Sie ist proportional zum Quadrat der senkrecht zur Oberfläche der abstrahlenden Fläche wirkenden Schallschnelle v_s [75]. In der vorliegenden Arbeit wurde stets mit der Auslenkung an der Referenzposition y_r gerechnet, die über

$$v_{s,r} = \omega y_r \quad (72)$$

mit der Schallschnelle an dieser Position zusammenhängt. Da die Reduktion der Referenzauslenkung y_r der Skalierung der gesamten Heul-Eigenform entspricht, resultiert eine Halbierung der Auslenkungsamplitude aufgrund des quadratischen Zusammenhangs bereits in einer Viertelung der abgestrahlten Schallleistung. Dies entspricht einer Reduktion des Schallleistungspegels um 6 dB, was als deutliche Reduktion des Getriebeheulens wahrgenommen wird. Eine solche Reduktion ist bei Verwendung mehrerer Flächenwandler und Ansteuerung über den FxLMS-Algorithmus auch unter realen Bedingungen zu erwarten.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird erstmals die Schwingungsminderung des Getriebeheulens mittels piezoelektrischer Flächenwandler an einem manuellen Schaltgetriebes untersucht. Verursacht wird dieses akustische Phänomen durch resonantes Systemverhalten, das durch betriebsbedingte schwellende Verzahnungskräfte angeregt wird. Diese Anwendung stellt ein Beispiel für die elektromechanische Schwingungsbeeinflussung geometrisch komplexer Strukturen dar.

Die Grundlage für die realitätsnahe Simulation bildet hierbei eine experimentelle Modalanalyse des untersuchten Getriebes. Diese wird an einem Prüfstand durchgeführt, an dem Betriebsbedingungen realisiert werden können, bei denen periodische Verzahnungsanregungen eine Gehäuseresonanz anregen und damit das Getriebeheulen verursachen. Die Messung zeigt diverse eng benachbarte Eigenfrequenzen. Die Identifikation der zugehörigen Eigenvektoren gelingt mit den zur Verfügung stehenden Algorithmen nur teilweise, womit lediglich die Darstellung des dominanten Systemverhaltens möglich ist. Die identifizierten Eigenformen bilden das Getriebe aufgrund der begrenzten Anzahl an verwendeten Messpositionen dabei nur mit einer für die weiteren Untersuchungen unzureichenden räumlichen Auflösung ab.

Ein vom Hersteller zur Verfügung gestelltes räumlich hochaufgelöstes Finite-Elemente-Modell des Getriebes bildet die Basis für das weitere Vorgehen. Dieses wird an die am Prüfstand geltenden Randbedingungen angepasst und mittels einer Sensitivitätsanalyse an die experimentell ermittelten dynamischen Eigenschaften angeglichen. Damit gelingt die Identifikation der sowohl numerisch als auch experimentell bestätigten Eigenform, die für das Getriebeheulen verantwortlich ist. Mittels einer detaillierten Analyse dieser Eigenform werden geeignete Aktorpositionen auf dem Getriebegehäuse identifiziert, an denen die piezoelektrischen Flächenwandler zur Schwingungsminderung appliziert werden können.

Für die Simulation verschiedener Ansätze der Schwingungsminderung werden im FE-Modell sieben hinsichtlich der Kopplungsfaktoren optimierte Flächenwandler auf die ausgewählten Bereiche auf dem Getriebegehäuse modelliert. Das resultierende elektromechanisch gekoppelte Gesamtsystem wird nach einer durchgeführten Modellreduktion für zeiteffiziente Simulationen aktiver und passiver Ansätzen zur Schwingungsminderung genutzt: Passive Schwingungstilgung wird als Shunt-Damping realisiert. In einem klassischen Ansatz werden alle zur Verfügung stehenden Shunts auf die gleiche elektrische Schwingkreisfrequenz ausgelegt, womit eine maximale Amplitudenreduktion von 2,9 dB realisiert wird. Mit Hilfe eines neu entwickelten Ansatzes für Multi-Shunt-Systeme gelingt bei verstimmten Auslegungsfrequenzen eine etwas höhere Reduktion von 3,6 dB. Höhere Reduktionen sind bei passiver Verwendung der Flächenwandler aufgrund der geringen Kopplungsfaktoren nicht möglich.

Die im nächsten Schritt untersuchte Optimale Störgrößenaufschaltung zeigt das Potential aktiver Ansätze. Hierauf aufbauend wird eine realitätsnahe Simulation unter Berücksichtigung des Leistungsverstärkers und der digitalen Echtzeitdatenverarbeitung eines einzelnen über

den FxLMS-Algorithmus angesteuerten Flächenwandlers durchgeführt. Diese zeigt eine deutliche Schwingungsminderung. Mit dem einzelnen Wandler wird bereits eine Reduktion von 2,1 dB erreicht. Bei Verwendung aller sieben im Modell abgebildeten Flächenwandler ist eine nahezu vollständige Unterdrückung des Getriebeheulens prinzipiell möglich. Insbesondere die hierfür benötigten Verstärker und Verkabelungen erfordern jedoch erheblichen Aufwand bei einer praktischen Umsetzung. Die simulative Untersuchung zeigt somit einerseits die prinzipielle Machbarkeit und das Potential der Technologie, andererseits jedoch auch die Schwachstellen hinsichtlich einer realen Umsetzung.

Aktuelle Anfragen der Automobilindustrie zur Möglichkeit der aktiven Beeinflussung des Getriebeheulens belegen die praktische Relevanz des hier bearbeiteten Themas. Die vielversprechenden Ergebnisse der durchgeführten Simulationen legen die Fortführung des Projekt trotz des zu erwartenden Aufwandes in einer praktischen Umsetzung nahe. Da das Getriebeheulen nur eines von vielen Getriebegeräuschen ist, sollte in diesem Rahmen geklärt werden, welche weiteren Betriebsgeräusche durch die selben Aktoren beeinflussbar sind.

Hierfür wird empfohlen, ein Getriebe mit wenigen der Schwingungsoptimierung dienenden passiven Maßnahmen zu verwenden. Ist beispielsweise die Steifigkeit des Getriebes auf den Wert begrenzt, der für die reine Funktion der Momentenübertragung nötig ist, steht zu erwarten, dass mit den piezoelektrischen Flächenwandlern eine wesentlich höhere und breitbandigere Beeinflussung des Schwingungsverhaltens des Getriebes möglich ist.

Die bislang durch passive Schwingungsminderungsmaßnahmen erreichten Funktionen könnten dann durch multifunktional nutzbare Aktoren erfüllt werden. Die zusätzlichen Kosten der Aktorik könnten durch eine sich ergebende Gewichts- und Bauraumreduktion kompensiert werden.

A Experimentelle Modalanalyse

Hier werden Gleichungen und Abbildungen eingefügt, die nicht zwingend für das Verständnis nötig sind, jedoch ein vollständigeres Bild der experimentellen Modalanalyse abgeben.

A.1 Grundlagen

Die Diskrete Fourier Transformation der Signals $x(j\Delta t)$ berechnen sich nach:

$$X(\zeta\Delta\omega) = \Delta t \sum_{j=0}^{J-1} x(j\Delta t) \exp[-i\zeta\Delta\omega j\Delta t], \quad \zeta = 0, 1, 2, \dots (J-1) \quad (73)$$

A.2 Gemessene Frequenzgänge

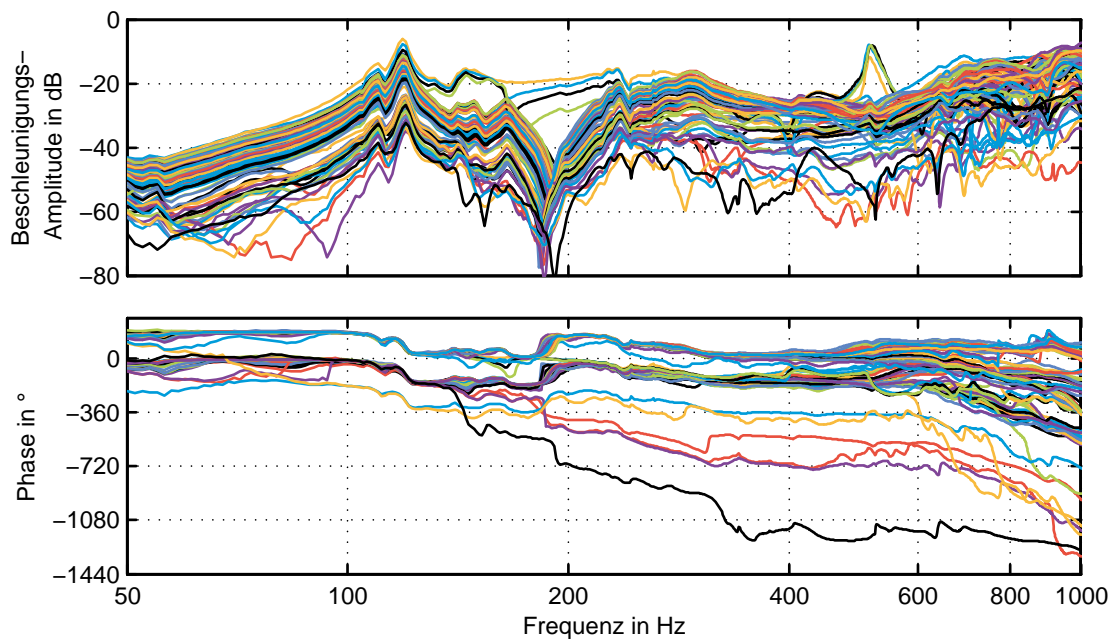


Abbildung 85: Frequenzgänge mit primär vertikaler Anregung auf Kardanwelle und Gehäuse-Ober-/Unterseite (to und bo) und verwendetem vertikalem Sensor bo3: Gute Übereinstimmung über weitem Frequenzbereich. Frequenzgänge, die aus den Anregungen auf der Welle resultieren, unterscheiden sich deutlich von den übrigen.

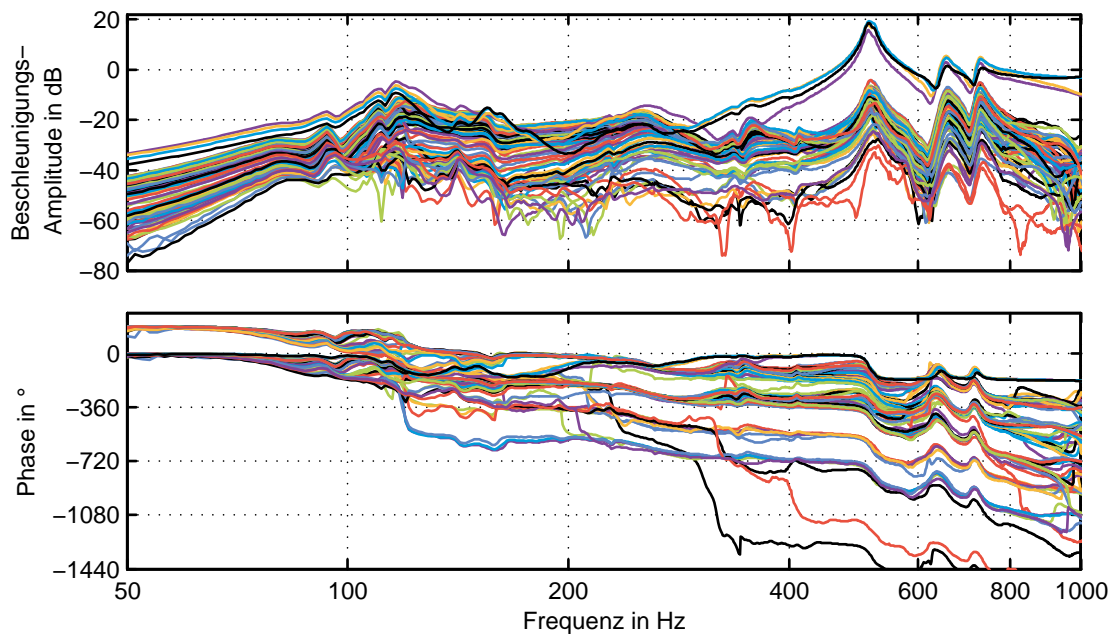


Abbildung 86: Frequenzgänge mit primär horizontaler Anregung auf Welle und Gehäuseseiten (fr und ba) und verwendetem horizontalen Sensor w4: Gute Übereinstimmung über gesamtem Frequenzbereich. Frequenzgänge, die aus den Anregungen auf der Welle resultieren, unterscheiden sich deutlich von den übrigen.

A.3 Mode Indicator Functions

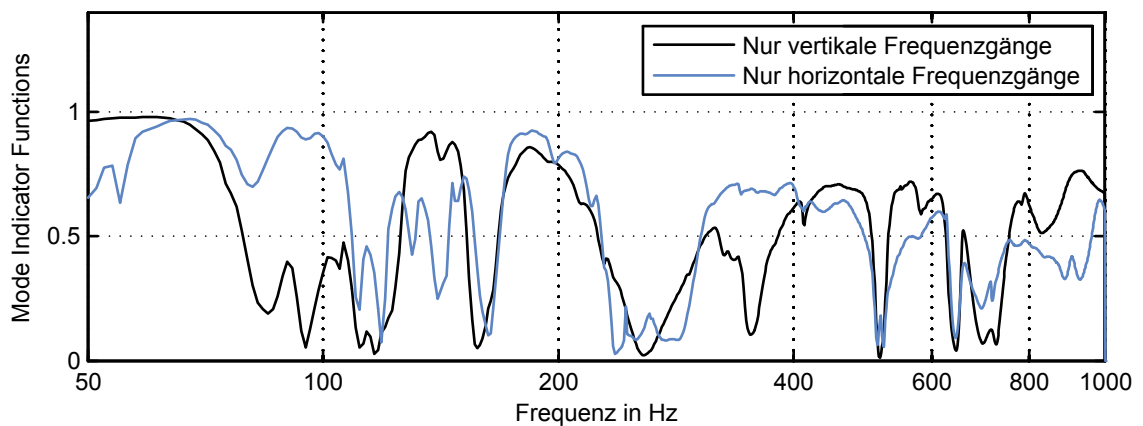


Abbildung 87: Primäre MIFs basierend auf allen vertikalen bzw. allen horizontalen Frequenzgängen: Deutliche Unterschiede im gesamten Frequenzbereich.

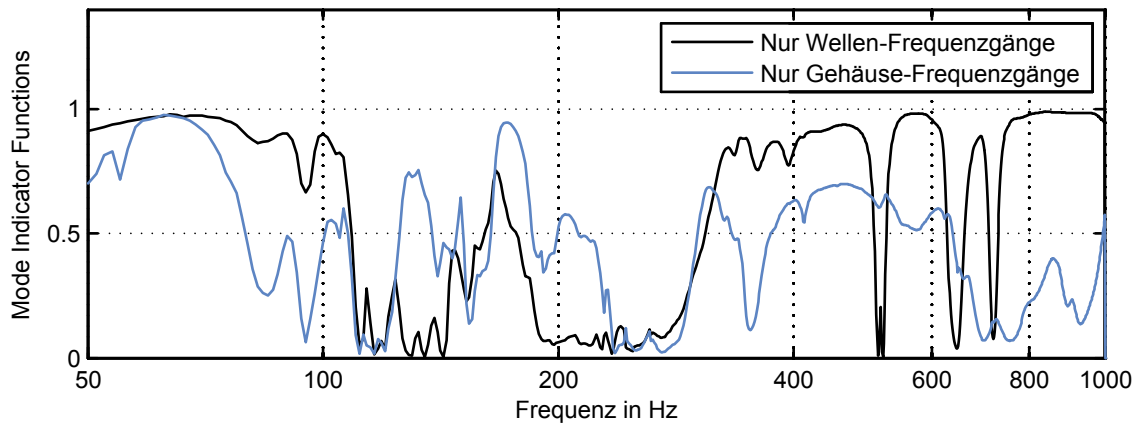


Abbildung 88: Primäre MIFs basierend auf Welle-Welle- bzw. Gehäuse-Gehäuse-Frequenzgängen: Deutliche Unterschiede im gesamten Frequenzbereich.

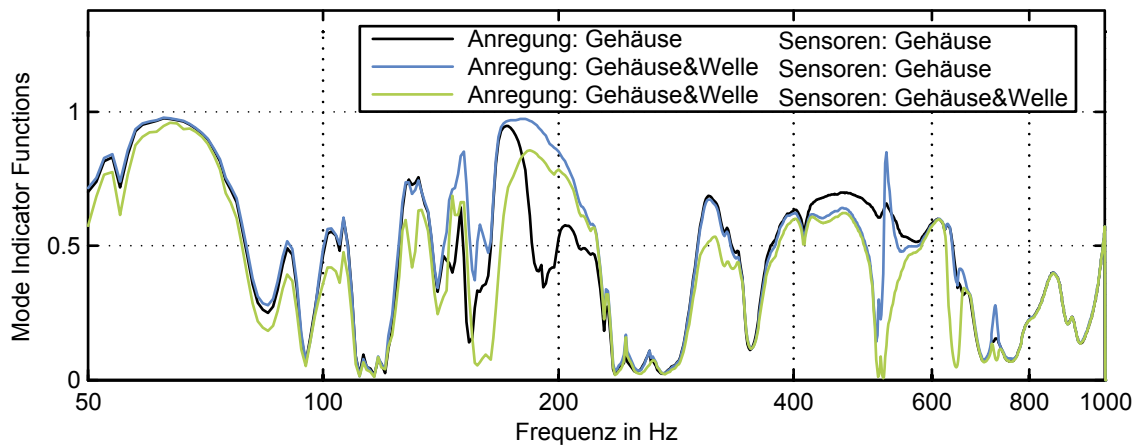


Abbildung 89: Primäre MIFs basierend auf unterschiedlichen Frequenzgängen mit den angegebenen Anregungs- und Antwort-Positionen: Übereinstimmung in weiten Bereichen. Deutliche Unterschiede von 150-250 Hz und 400-700 Hz.

A.4 Experimentell ermittelte Eigenformen

Hier sind die übrigen mit den Parametern aus Tabelle 1 ermittelten Eigenformen dargestellt.

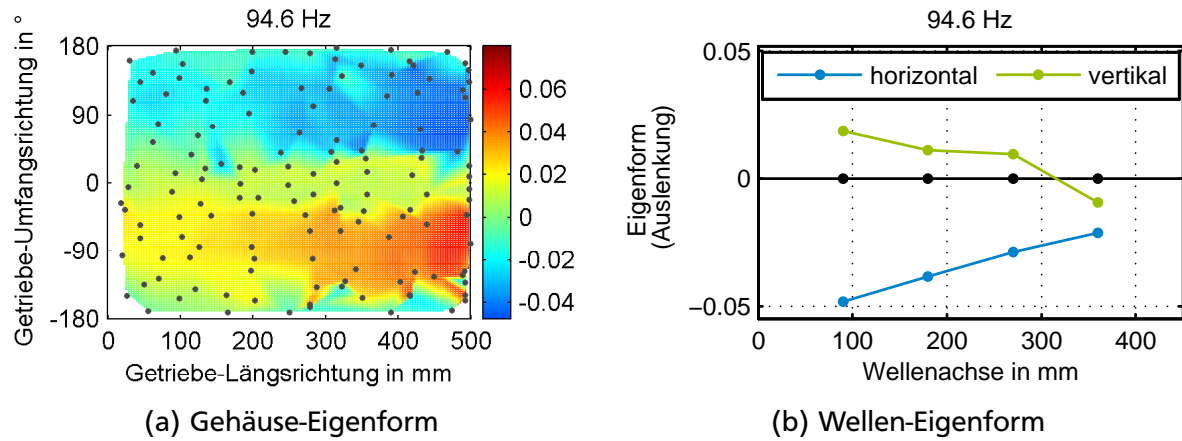


Abbildung 90: Zweite experimentell ermittelte Eigenform.

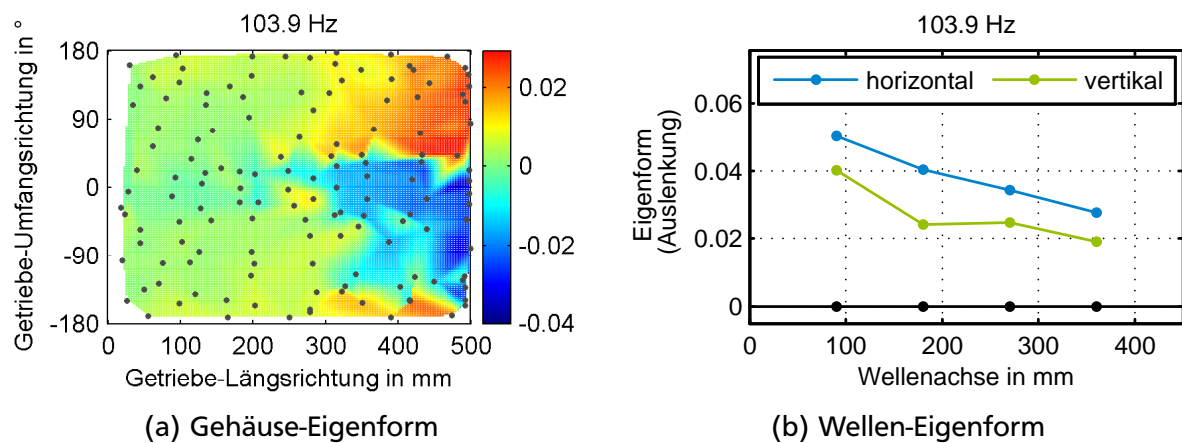


Abbildung 91: Dritte experimentell ermittelte Eigenform.

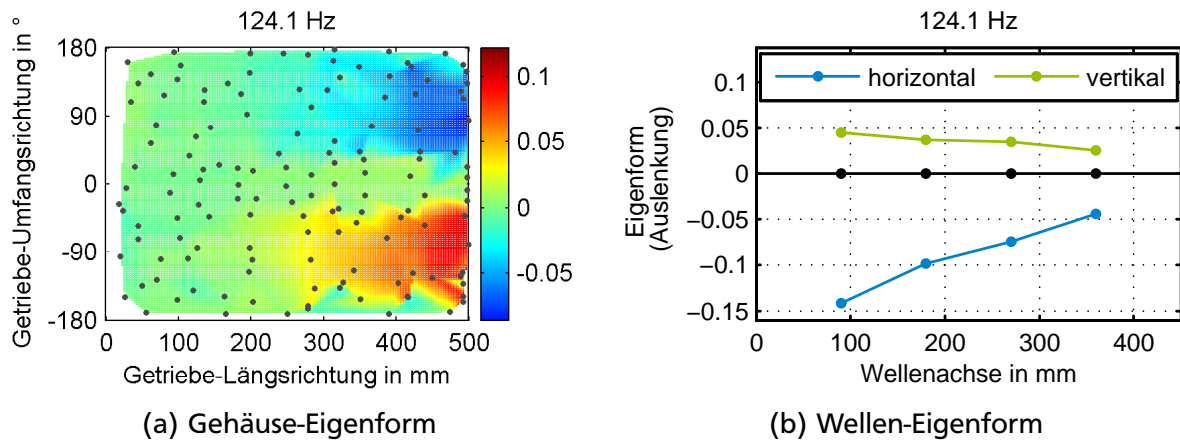


Abbildung 92: Siebte experimentell ermittelte Eigenform.

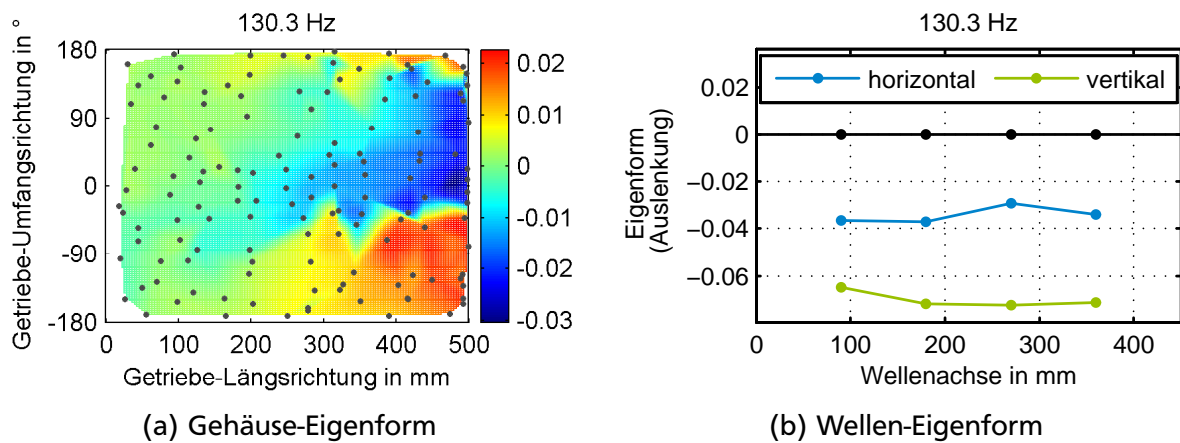


Abbildung 93: Achte experimentell ermittelte Eigenform.

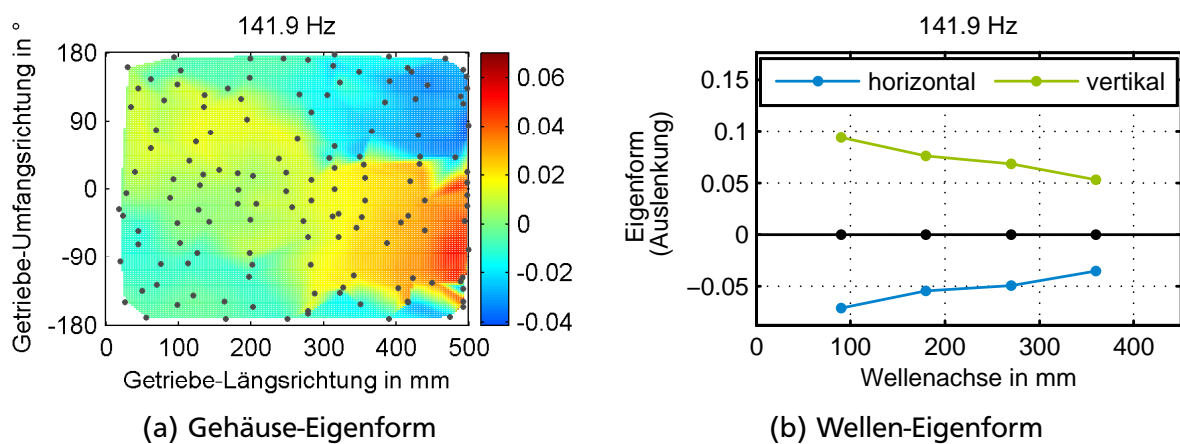


Abbildung 94: Neunte experimentell ermittelte Eigenform.

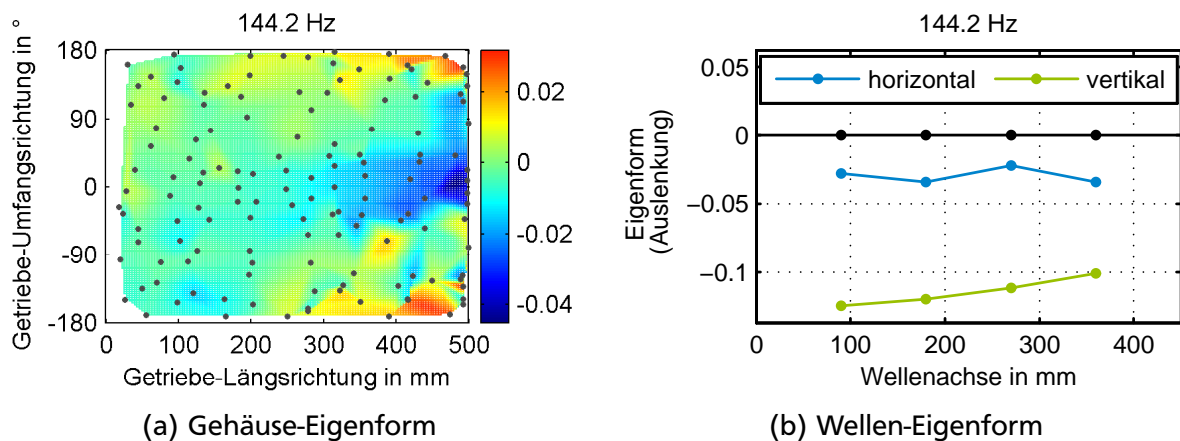


Abbildung 95: Zehnte experimentell ermittelte Eigenform.

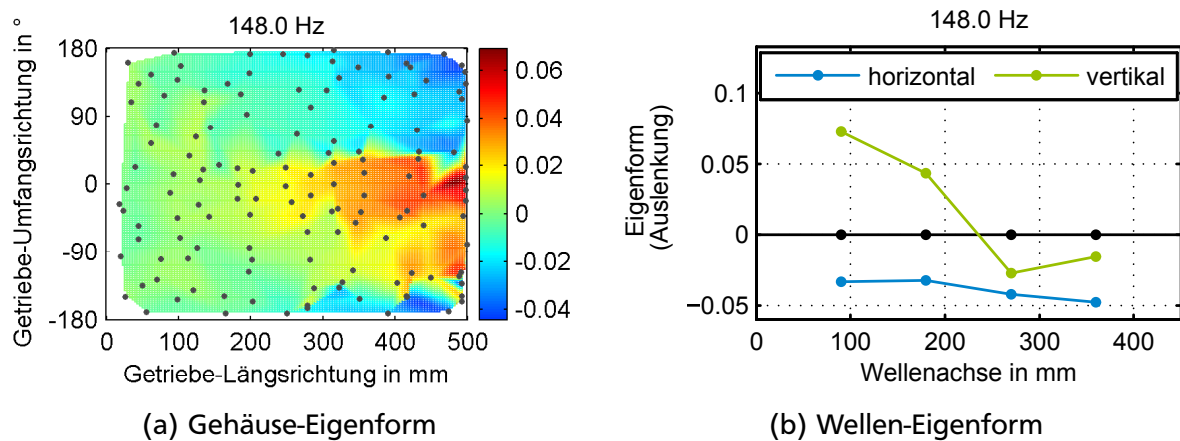


Abbildung 96: Elfte experimentell ermittelte Eigenform.

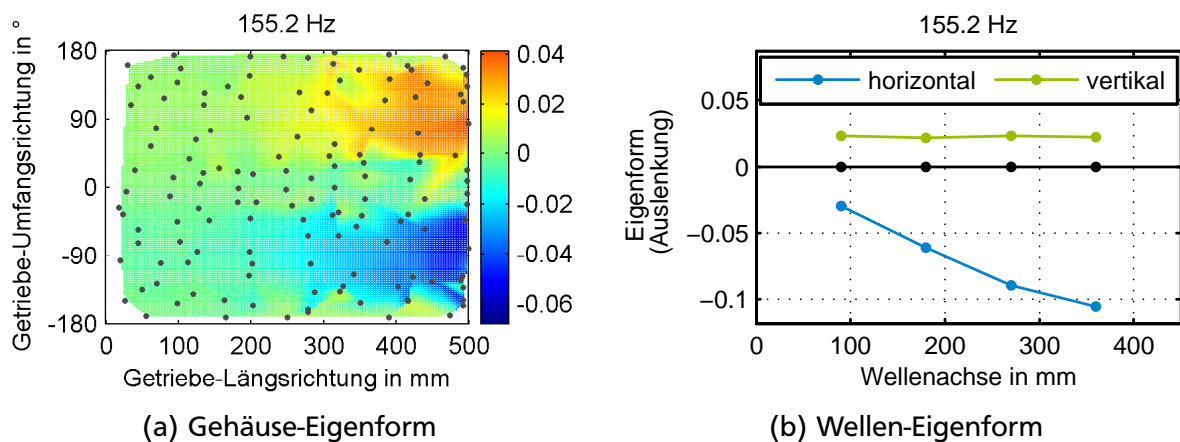


Abbildung 97: Zwölfte experimentell ermittelte Eigenform.

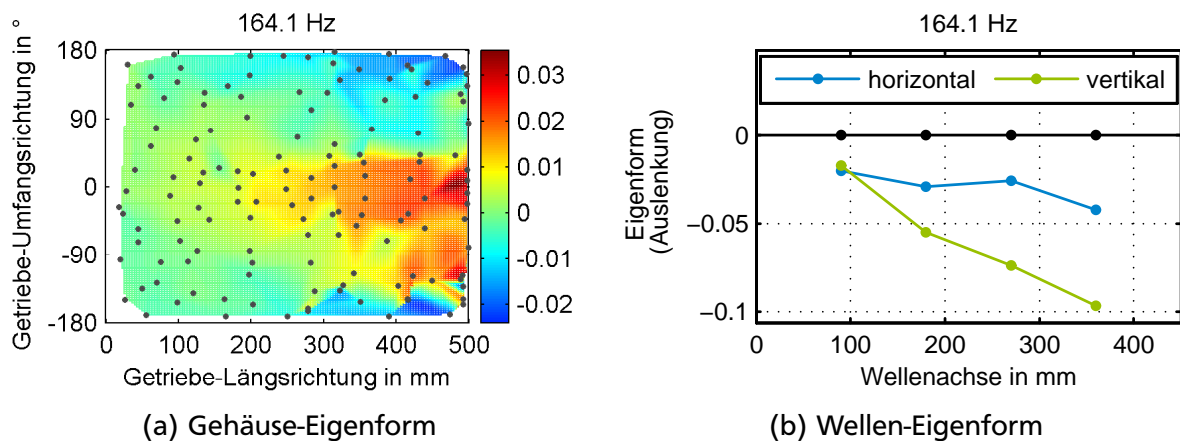


Abbildung 98: 13. experimentell ermittelte Eigenform.

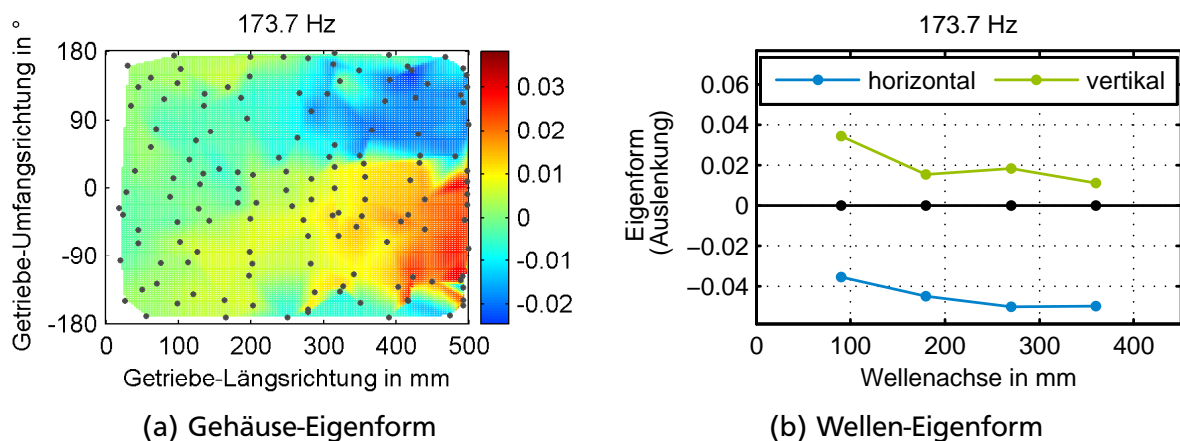


Abbildung 99: 14. experimentell ermittelte Eigenform.

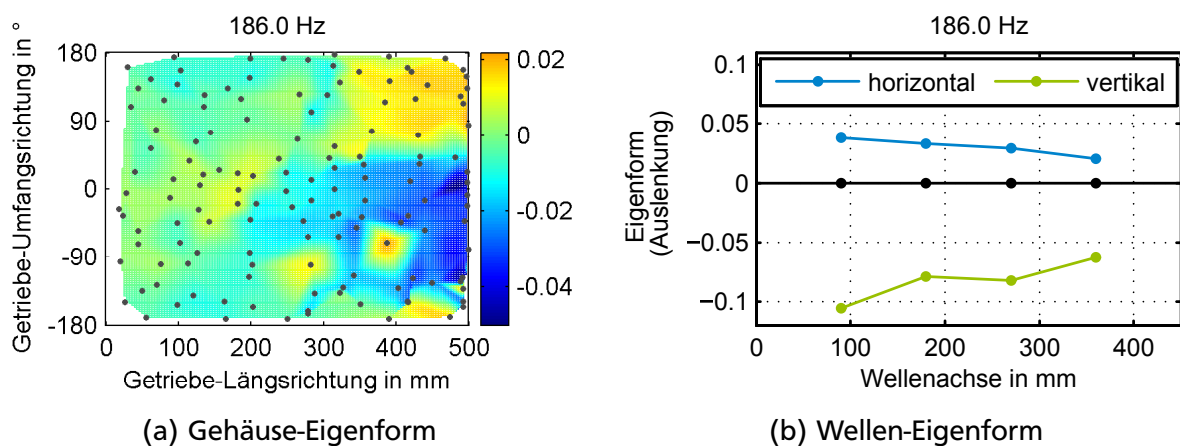
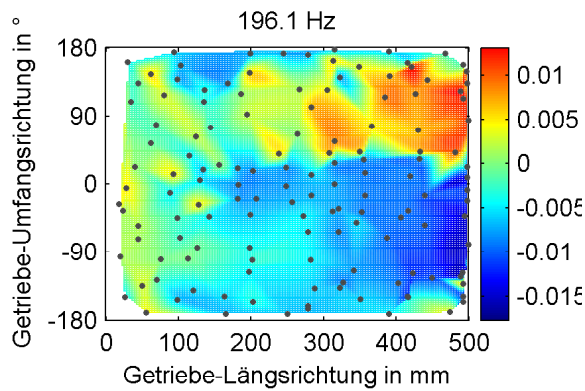
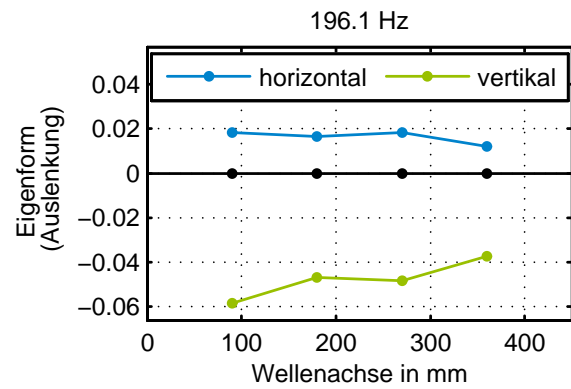


Abbildung 100: 15. experimentell ermittelte Eigenform.

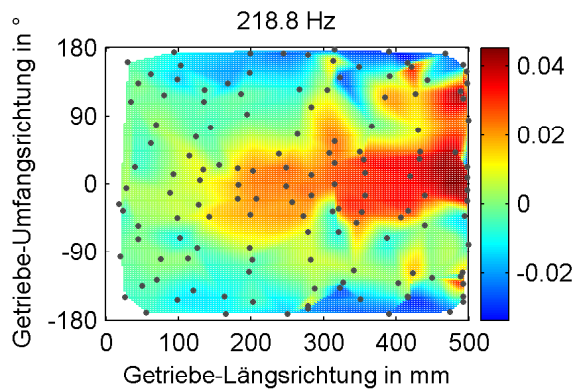


(a) Gehäuse-Eigenform

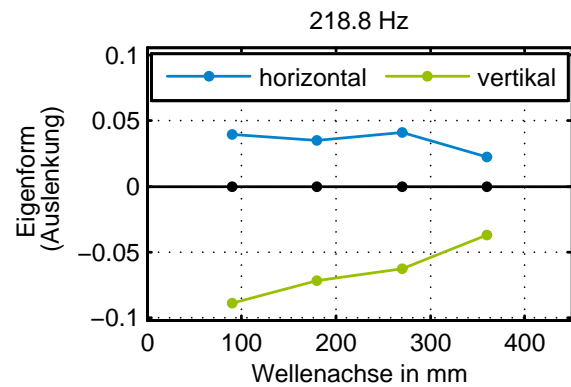


(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 101: 16. experimentell ermittelte Eigenform.

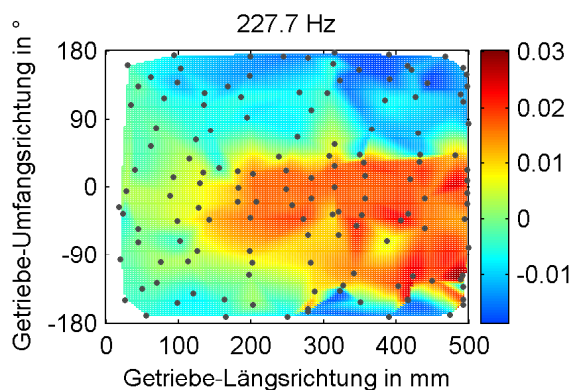


(a) Gehäuse-Eigenform

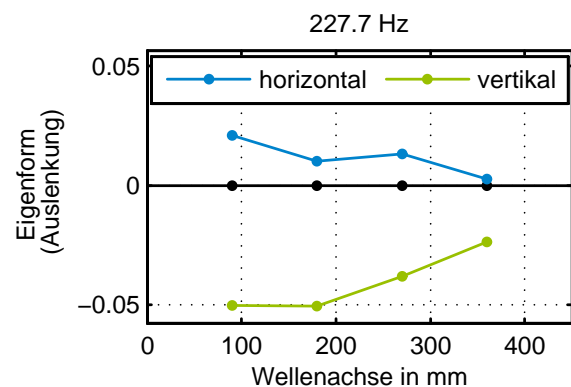


(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 102: 17. experimentell ermittelte Eigenform.



(a) Gehäuse-Eigenform



(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 103: 18. experimentell ermittelte Eigenform.

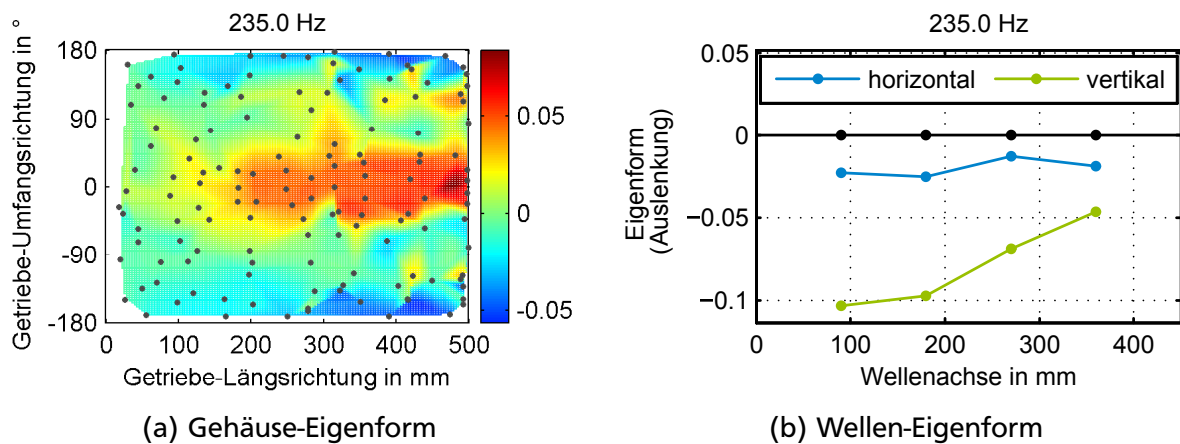


Abbildung 104: 19. experimentell ermittelte Eigenform.

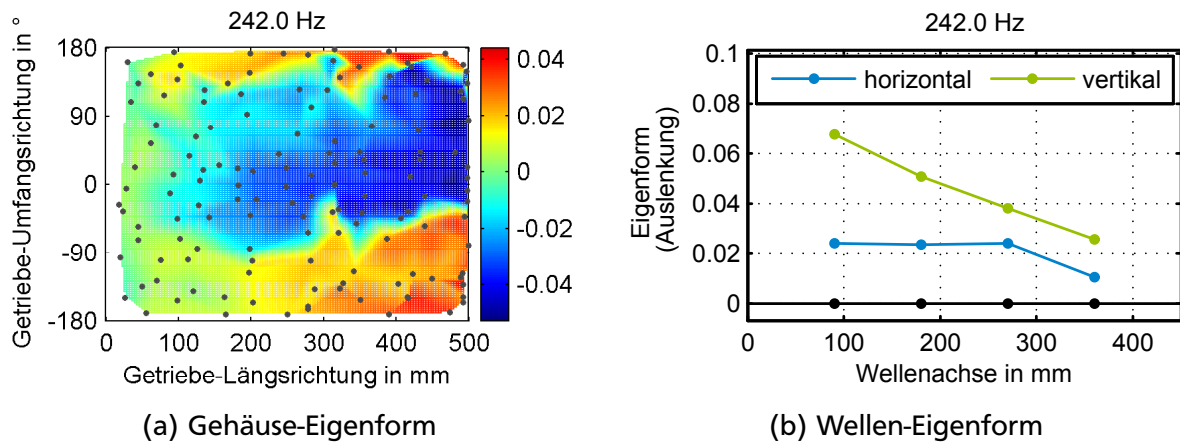


Abbildung 105: 20. experimentell ermittelte Eigenform.

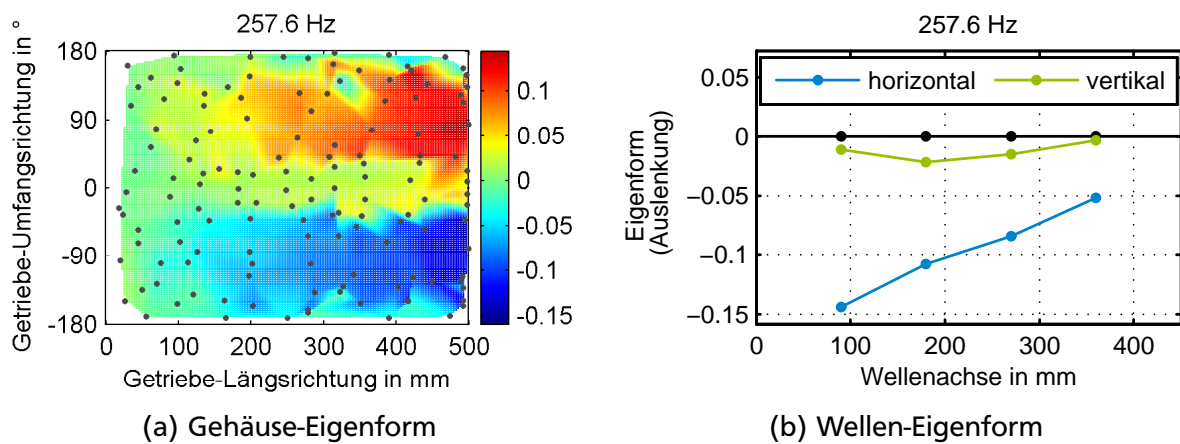


Abbildung 106: 21. experimentell ermittelte Eigenform.

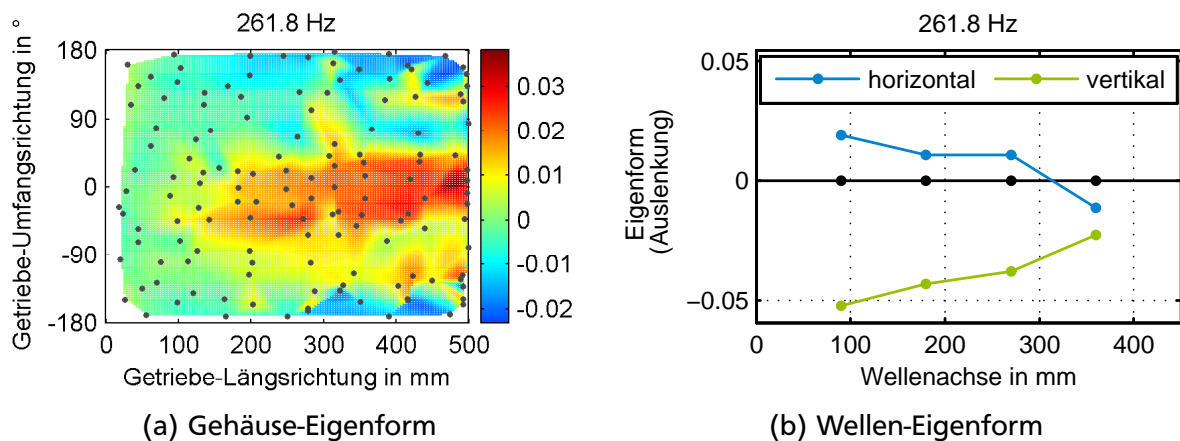


Abbildung 107: 22. experimentell ermittelte Eigenform.

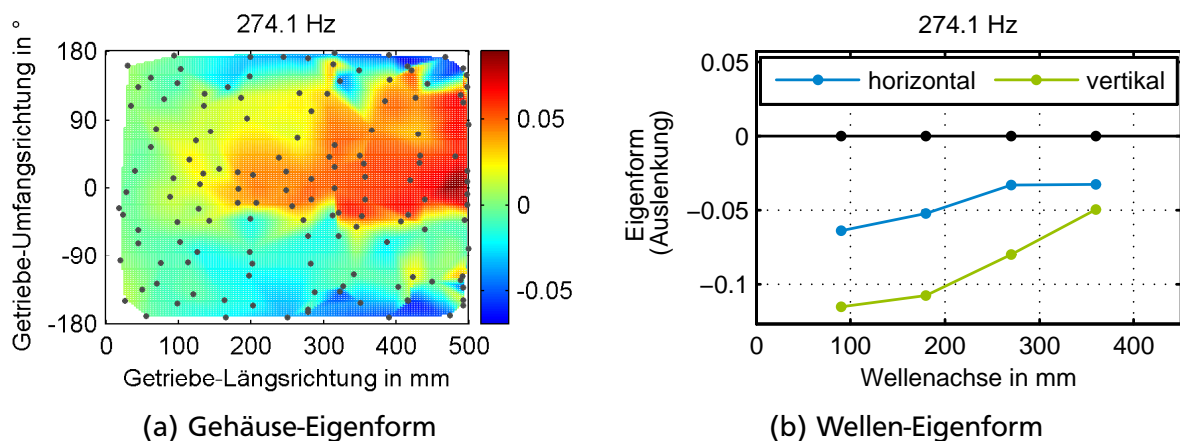


Abbildung 108: 23. experimentell ermittelte Eigenform.

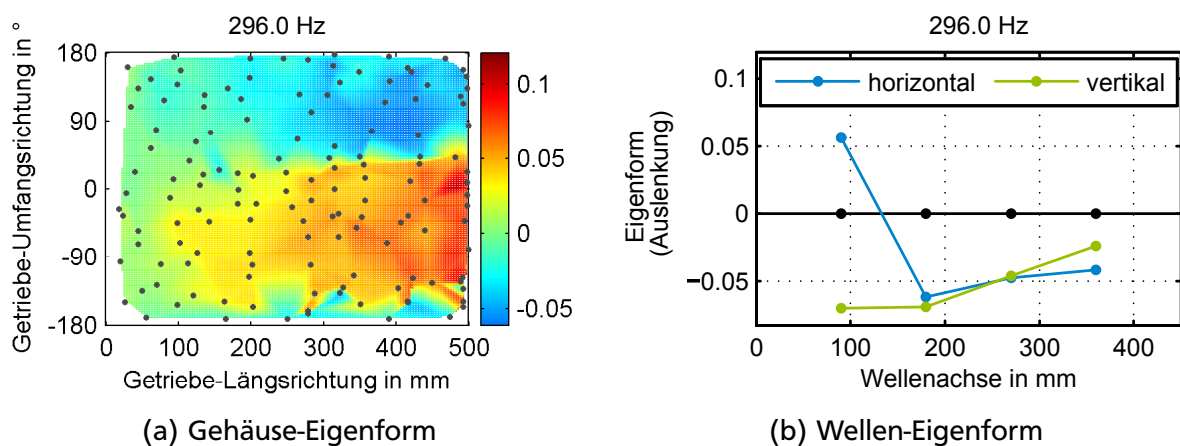


Abbildung 109: 24. experimentell ermittelte Eigenform.

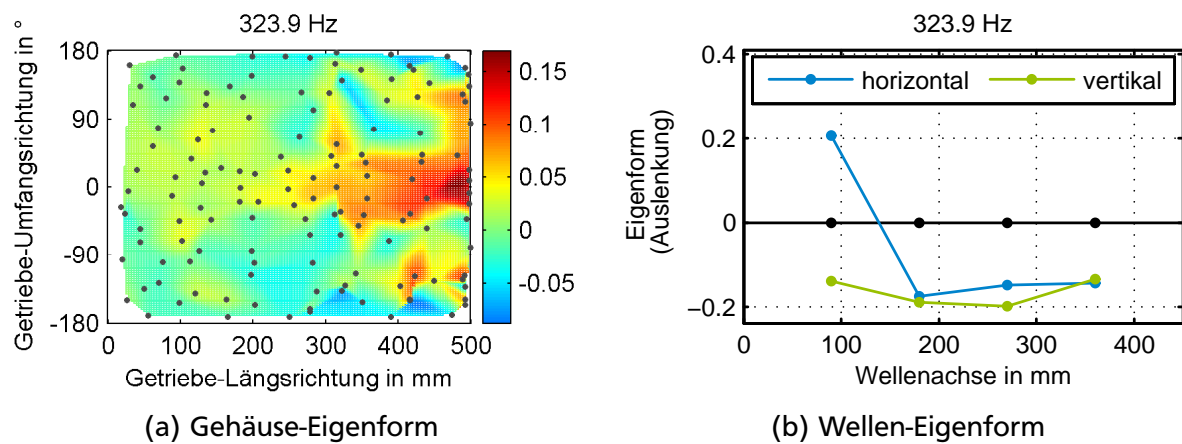


Abbildung 110: 25. experimentell ermittelte Eigenform.

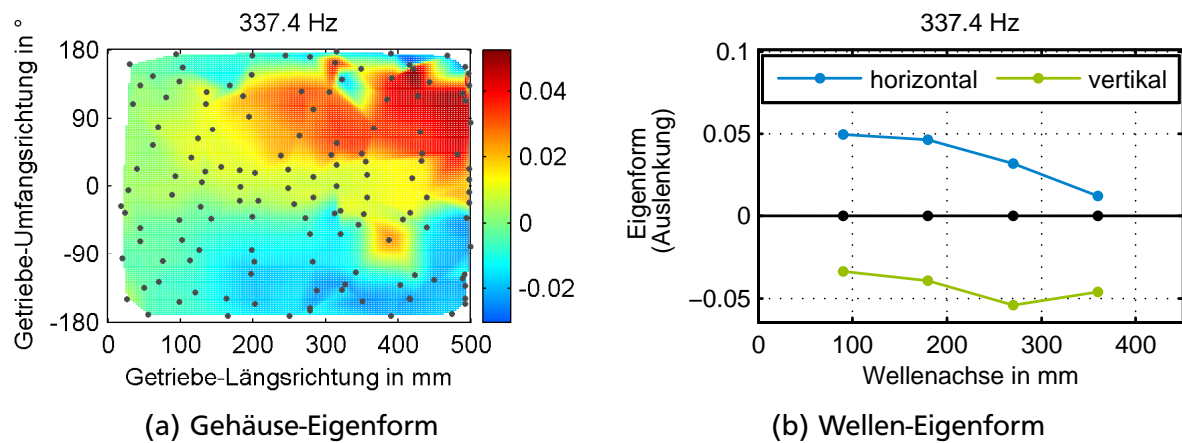


Abbildung 111: 26. experimentell ermittelte Eigenform.

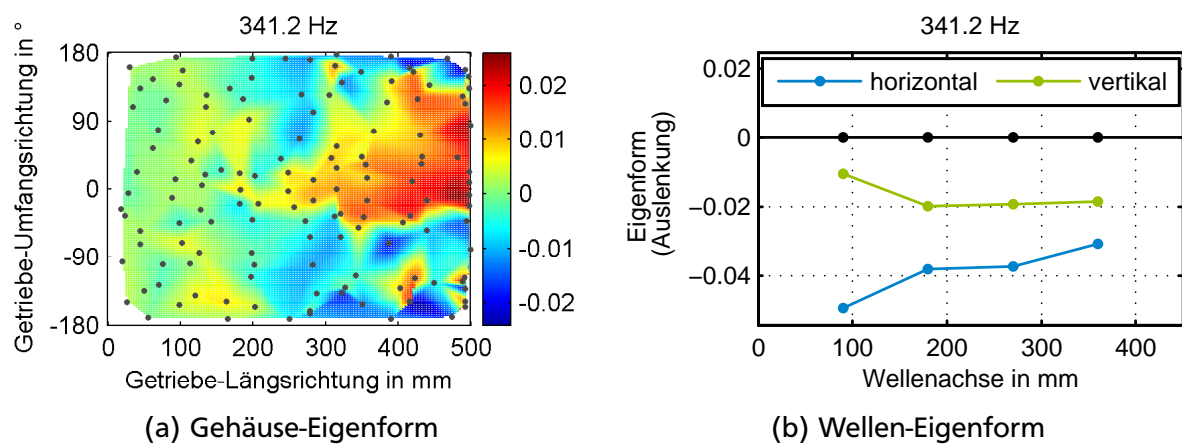


Abbildung 112: 27. experimentell ermittelte Eigenform.

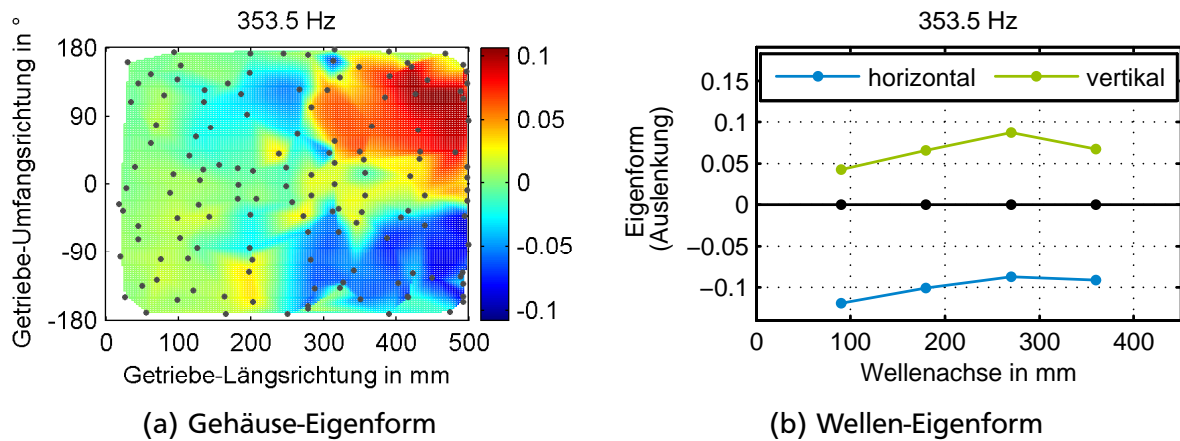


Abbildung 113: 28. experimentell ermittelte Eigenform.

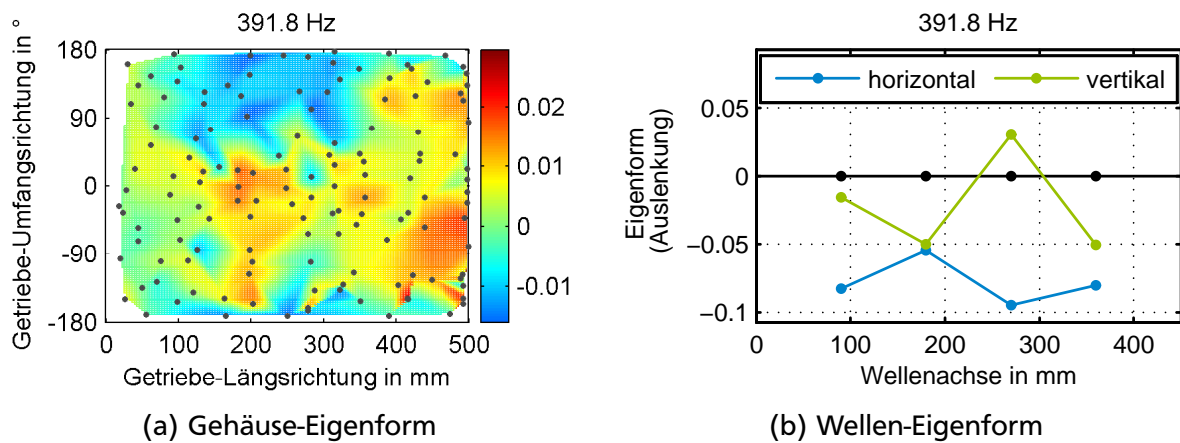


Abbildung 114: 29. experimentell ermittelte Eigenform.

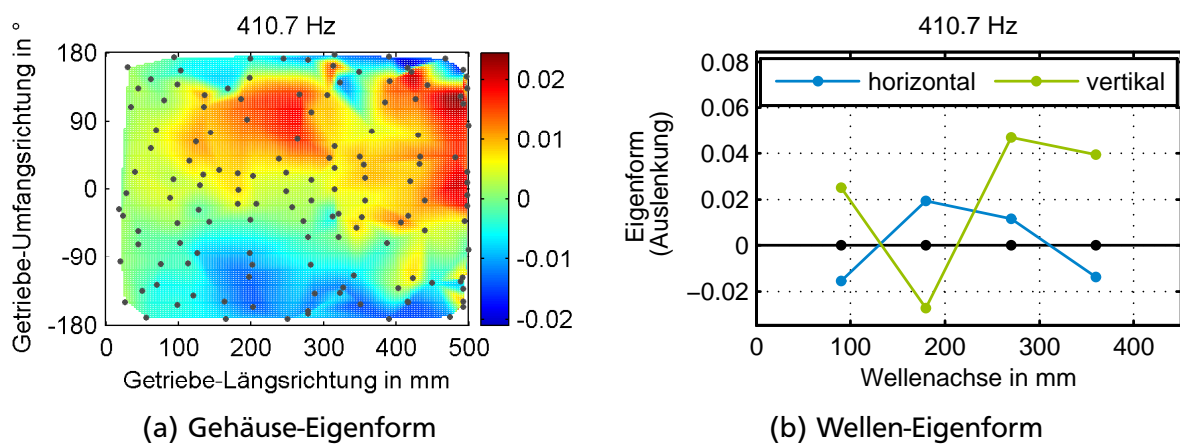


Abbildung 115: 30. experimentell ermittelte Eigenform.

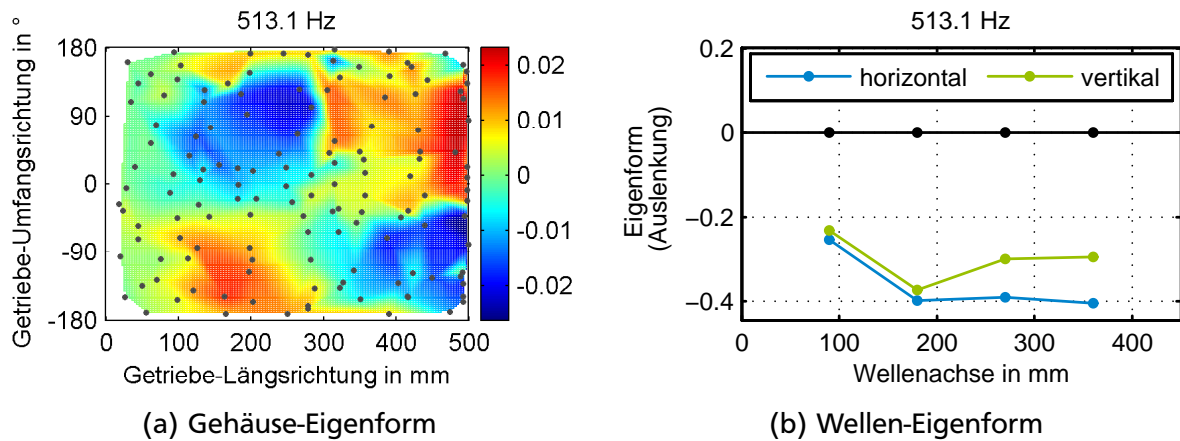


Abbildung 116: 31. experimentell ermittelte Eigenform.

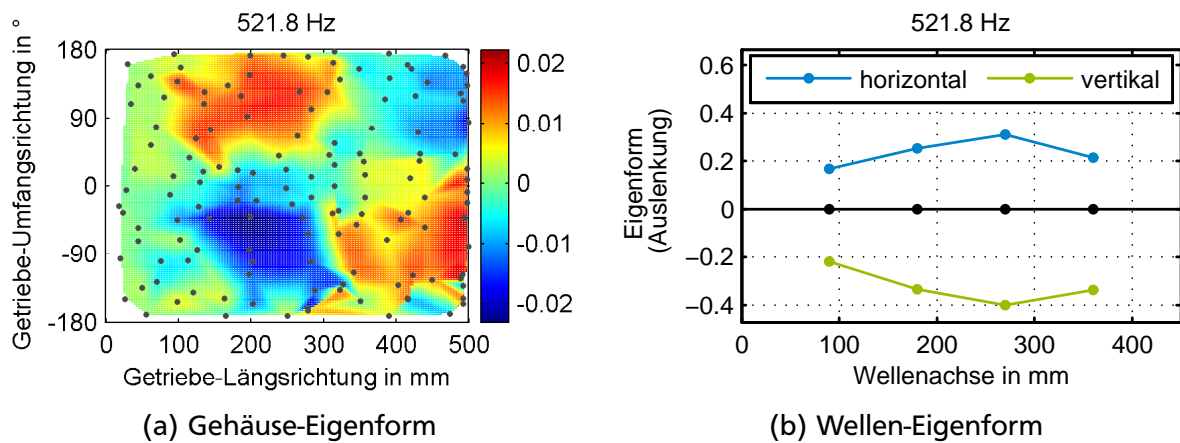


Abbildung 117: 32. experimentell ermittelte Eigenform.

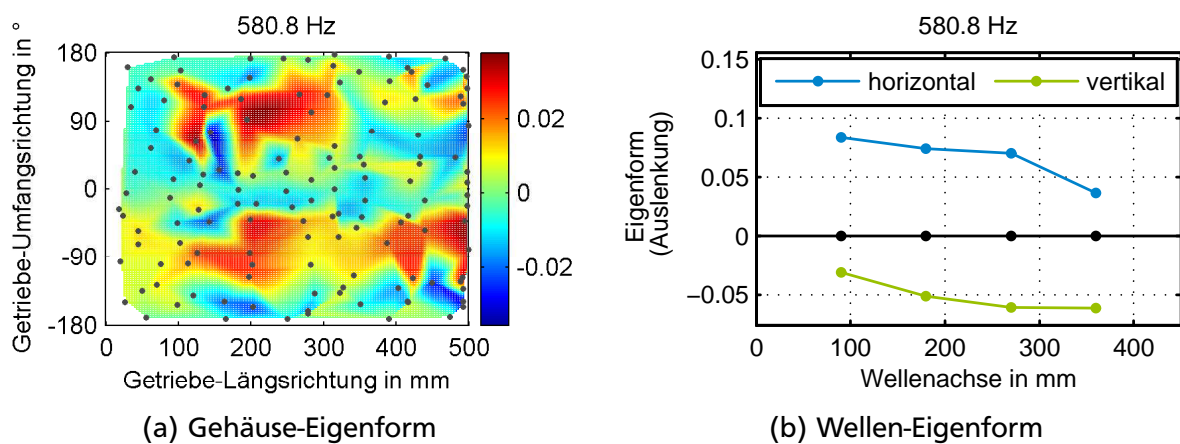


Abbildung 118: 33. experimentell ermittelte Eigenform.

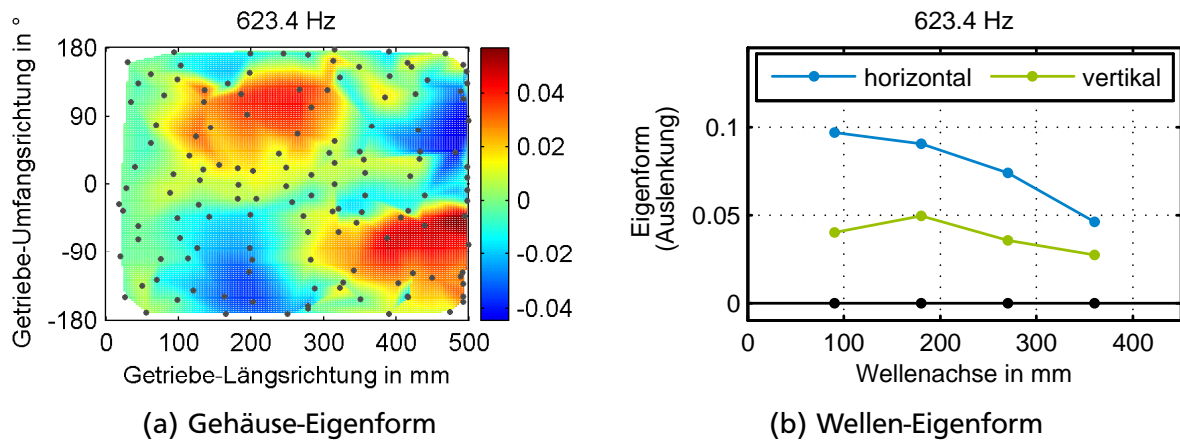


Abbildung 119: 34. experimentell ermittelte Eigenform.

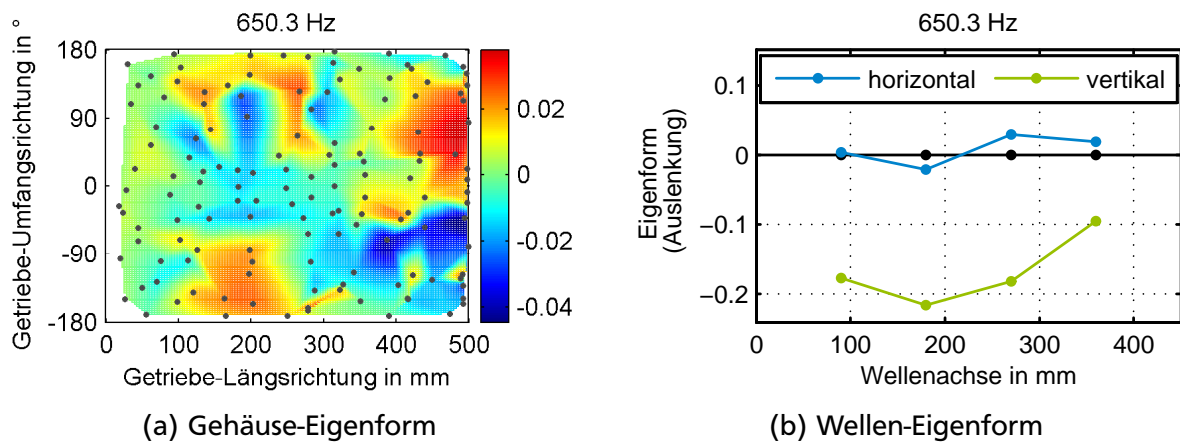


Abbildung 120: 35. experimentell ermittelte Eigenform.

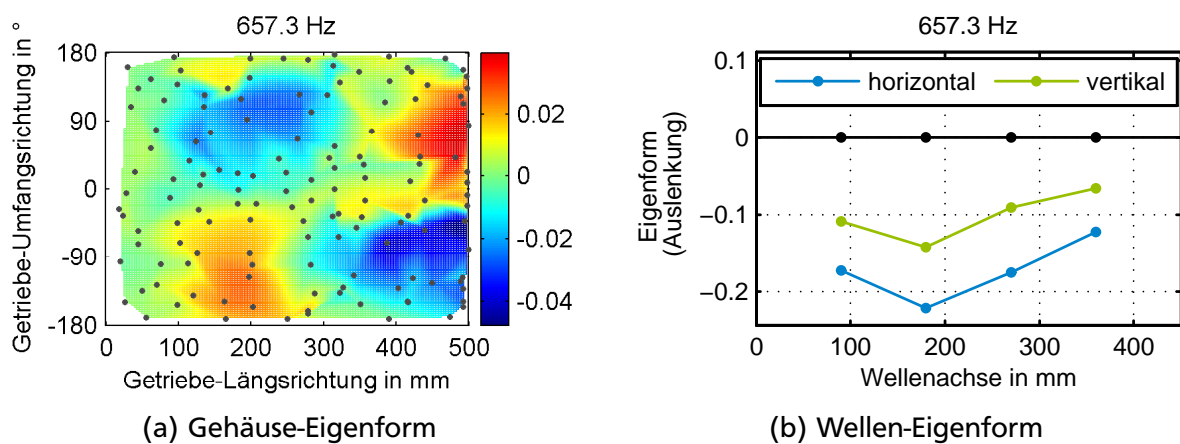


Abbildung 121: 36. experimentell ermittelte Eigenform.

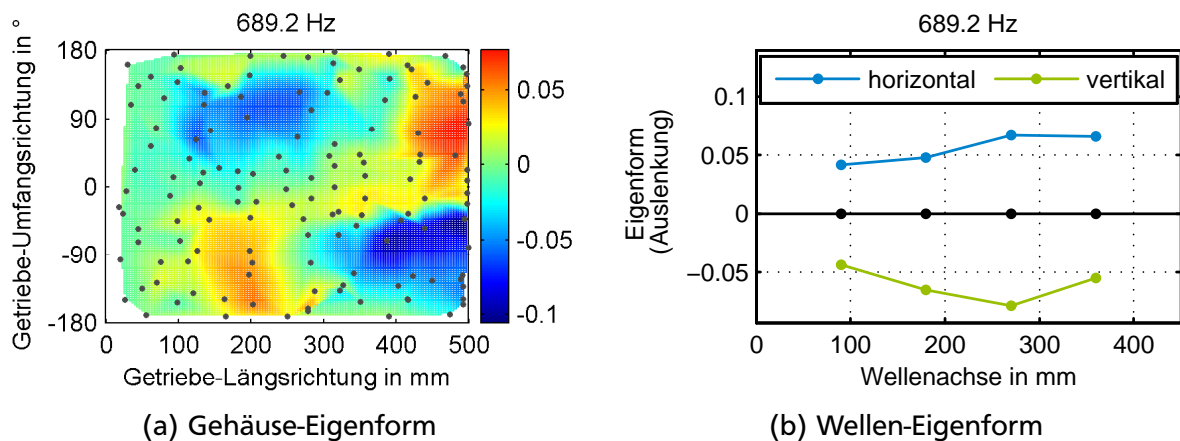


Abbildung 122: 37. experimentell ermittelte Eigenform.

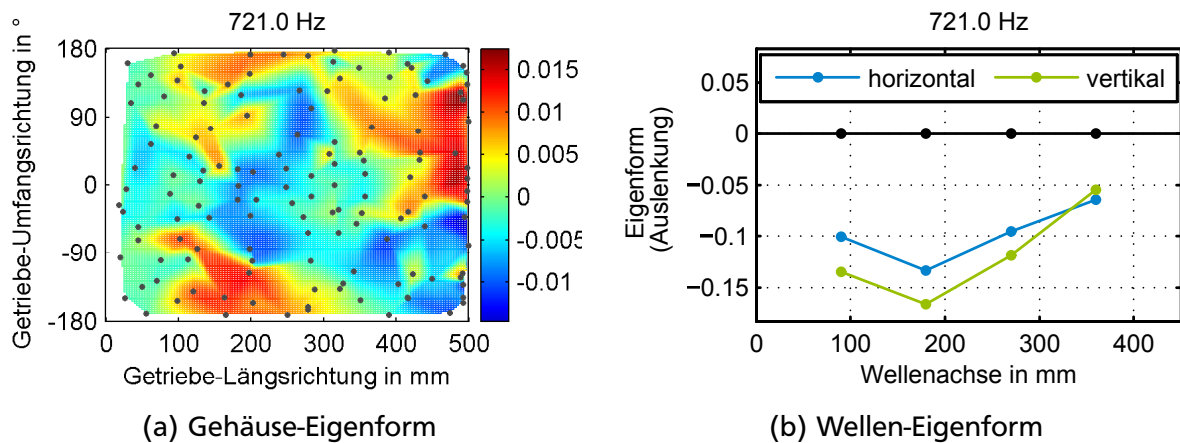


Abbildung 123: 38. experimentell ermittelte Eigenform.

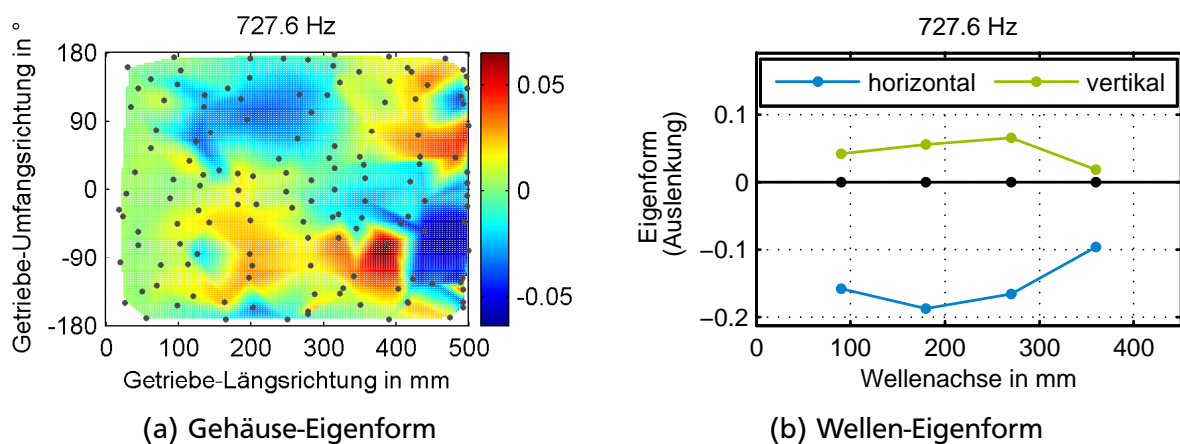


Abbildung 124: 39. experimentell ermittelte Eigenform.

A.5 Vergleich der gemessenen und analytischen Frequenzgänge

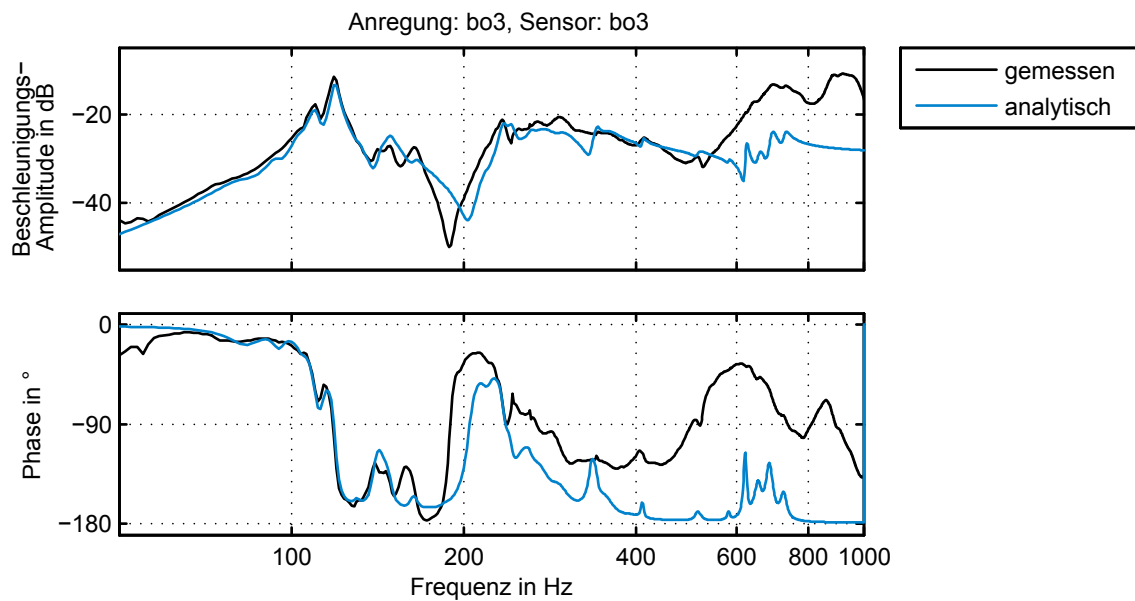


Abbildung 125: Vergleich der gemessenen und analytischen *Driving-Point*-Frequenzgängen an Position bo3: Sehr gute Übereinstimmung bis ca. 180 Hz, darüber hinaus zunehmend größere Abweichungen.

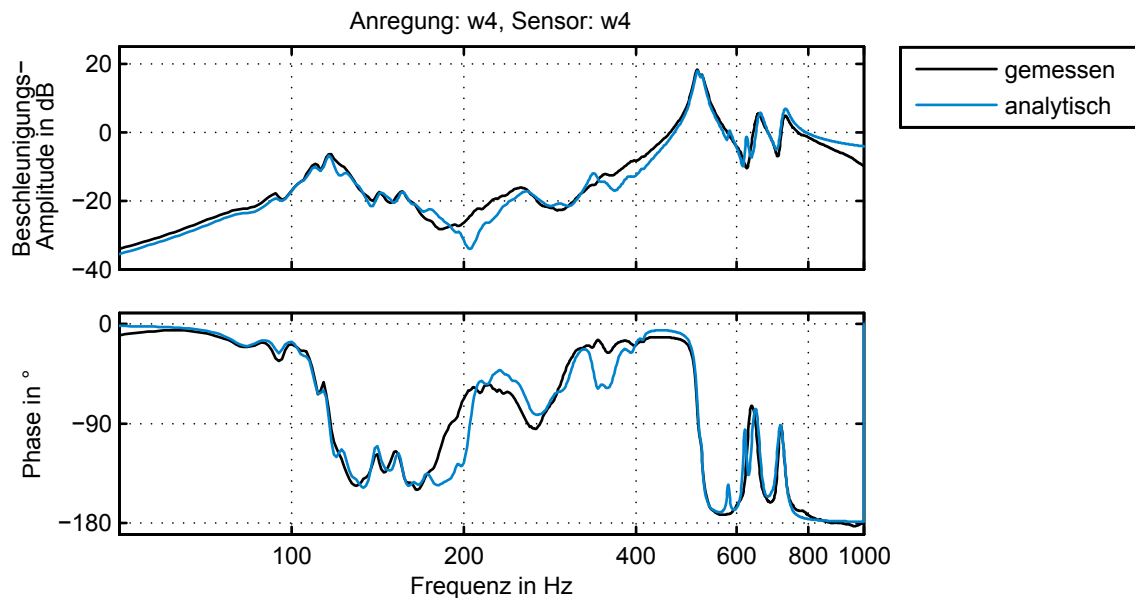


Abbildung 126: Vergleich der gemessenen und analytischen *Driving-Point*-Frequenzgängen an Position w4: Es gelingt eine sehr gute Übereinstimmung über den gesamten Frequenzbereich.

B Numerische Modalanalyse

B.1 Numerisch ermittelte Eigenformen des Referenzmodells

Hier sind die übrigen Eigenformen, bis auf die ersten drei, des FE-Referenzmodells dargestellt. Die ersten drei entsprechen Starrkörper-Eigenformen des Gleichlaufgelenk-Mittelteils, die aufgrund der nicht modellierten sehr schwachen Kopplung in translatorischer und radialer Richtung entstehen. Da diese in Realität nicht existieren, werden sie hier nicht gezeigt.

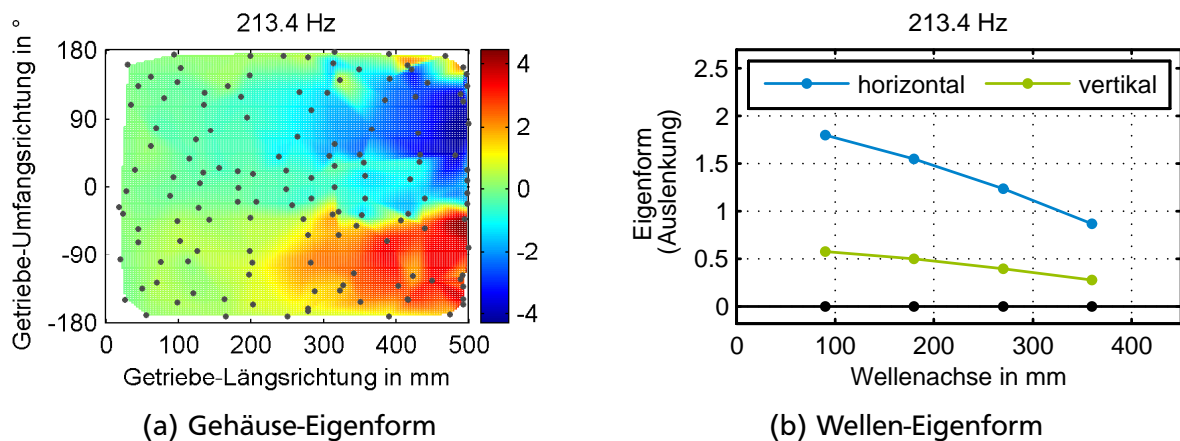


Abbildung 127: Sechste numerisch ermittelte Eigenform.

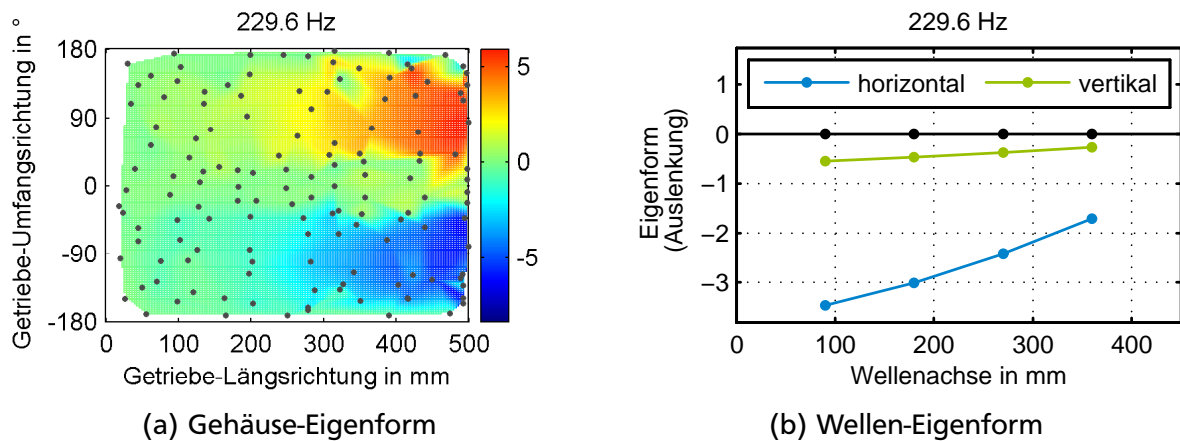
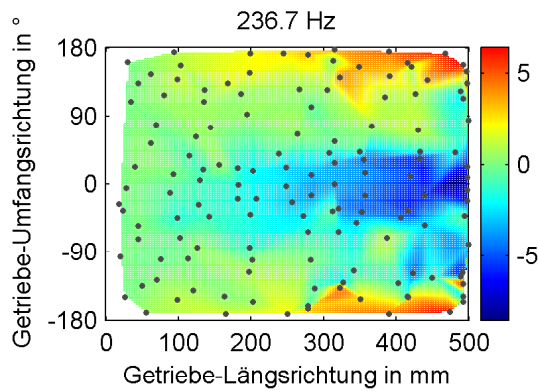
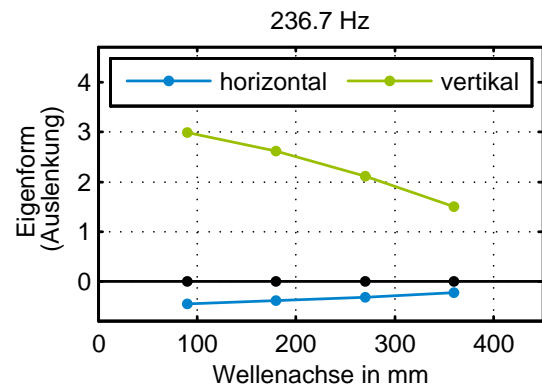


Abbildung 128: Siebte numerisch ermittelte Eigenform.

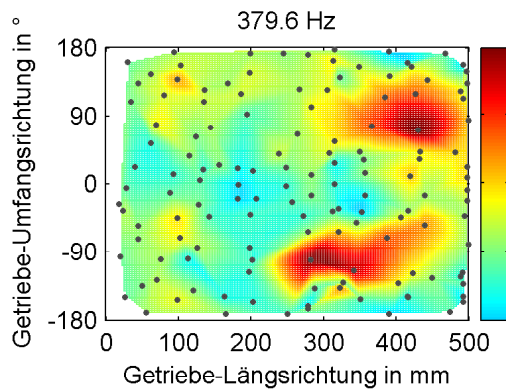


(a) Gehäuse-Eigenform

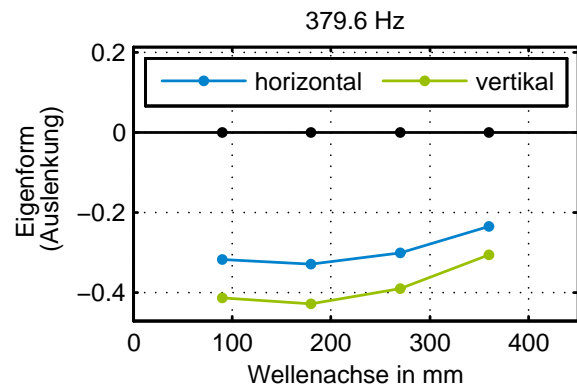


(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 129: Achte numerisch ermittelte Eigenform.

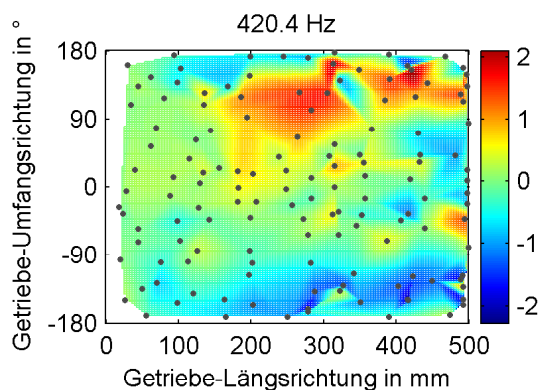


(a) Gehäuse-Eigenform

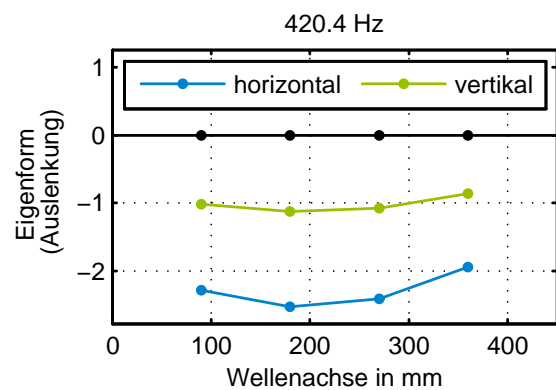


(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 130: Neunte numerisch ermittelte Eigenform.



(a) Gehäuse-Eigenform



(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 131: Zehnte numerisch ermittelte Eigenform.

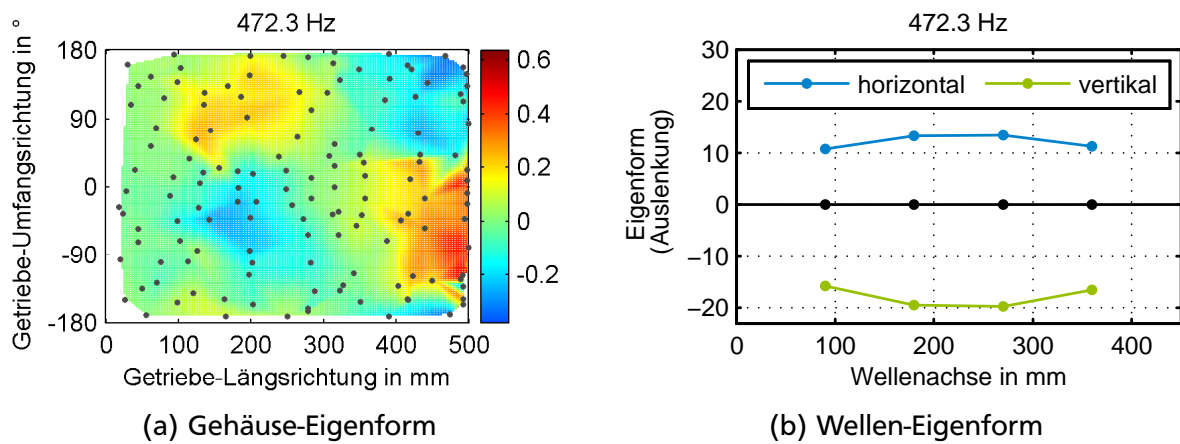


Abbildung 132: Elfte numerisch ermittelte Eigenform.

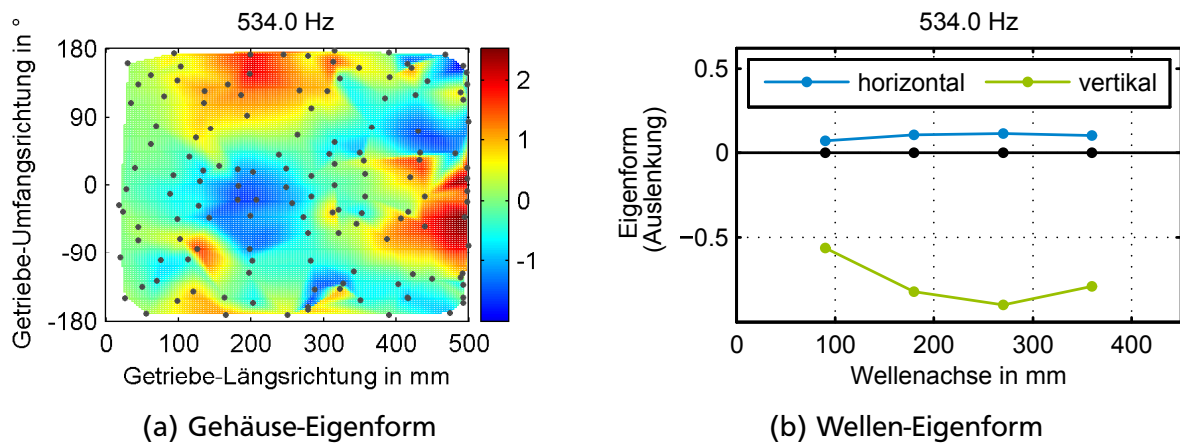


Abbildung 133: 13. numerisch ermittelte Eigenform.

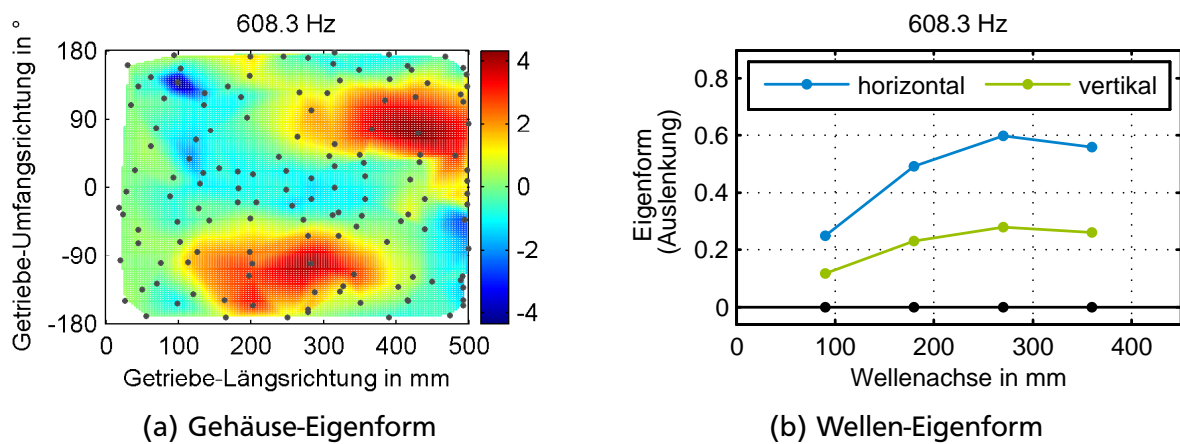
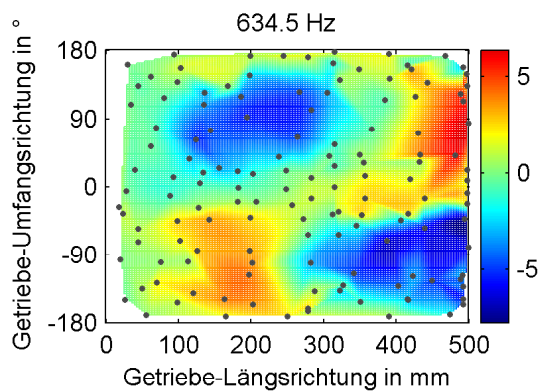
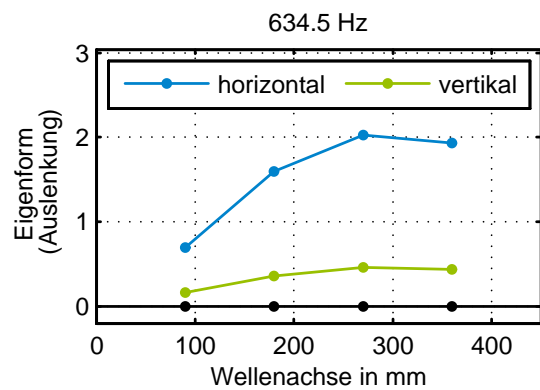


Abbildung 134: 14. numerisch ermittelte Eigenform.

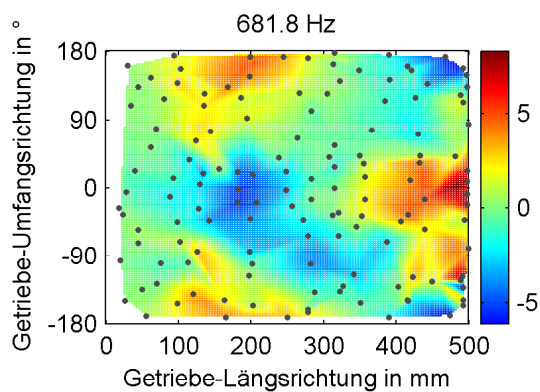


(a) Gehäuse-Eigenform

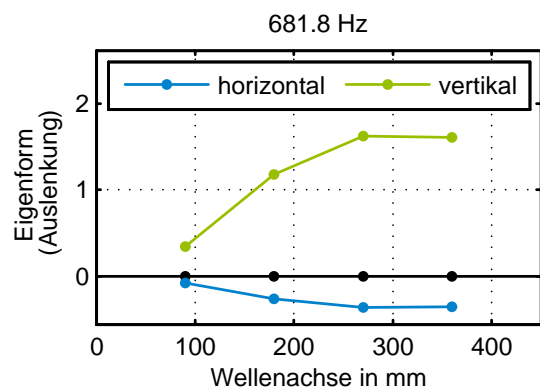


(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 135: 15. numerisch ermittelte Eigenform.

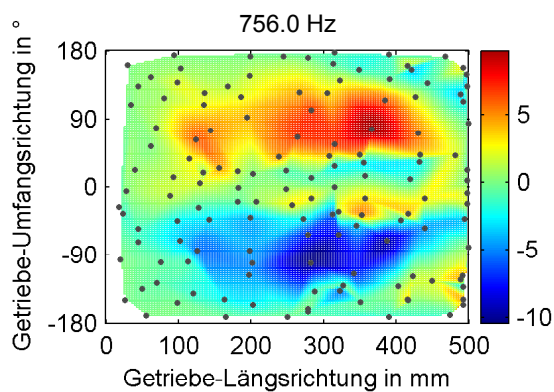


(a) Gehäuse-Eigenform

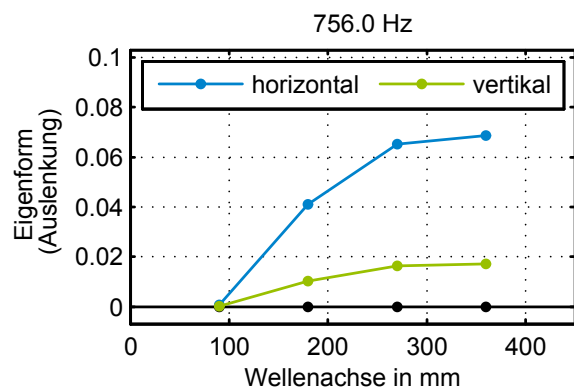


(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 136: 16. numerisch ermittelte Eigenform.

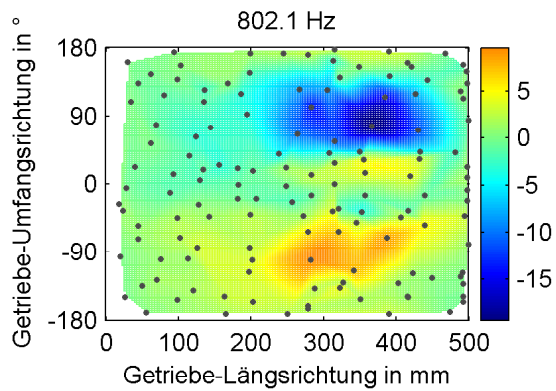


(a) Gehäuse-Eigenform

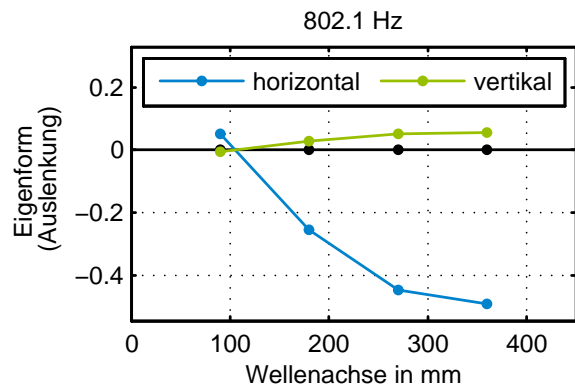


(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 137: 17. numerisch ermittelte Eigenform.

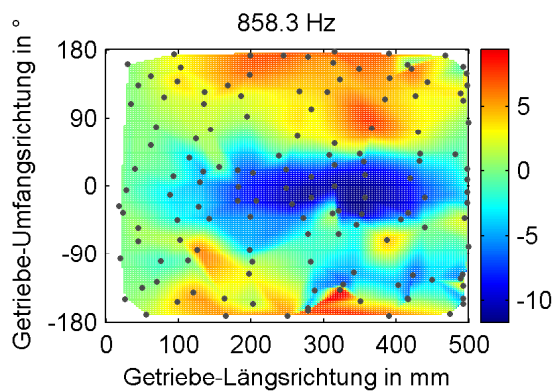


(a) Gehäuse-Eigenform

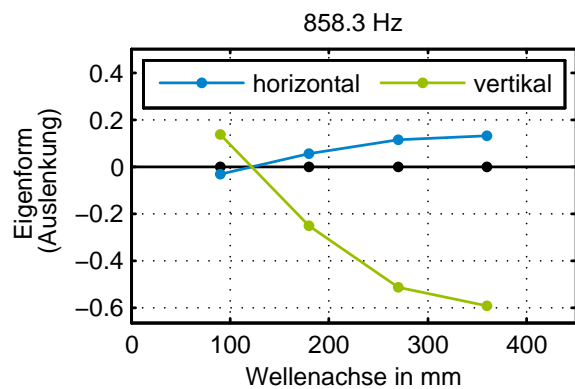


(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 138: 18. numerisch ermittelte Eigenform.

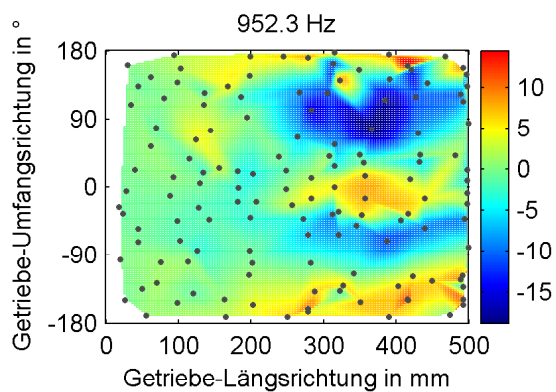


(a) Gehäuse-Eigenform

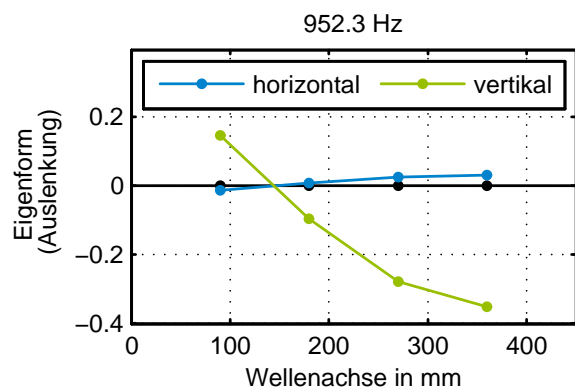


(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 139: 19. numerisch ermittelte Eigenform.

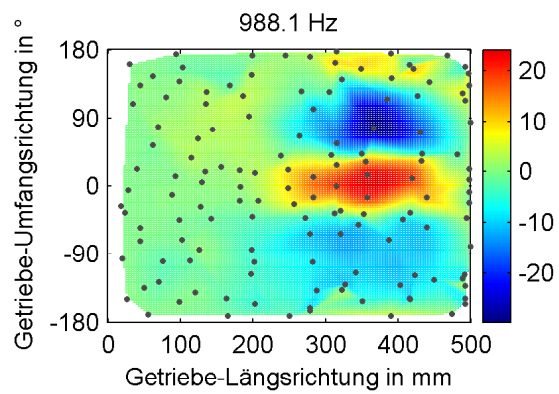


(a) Gehäuse-Eigenform

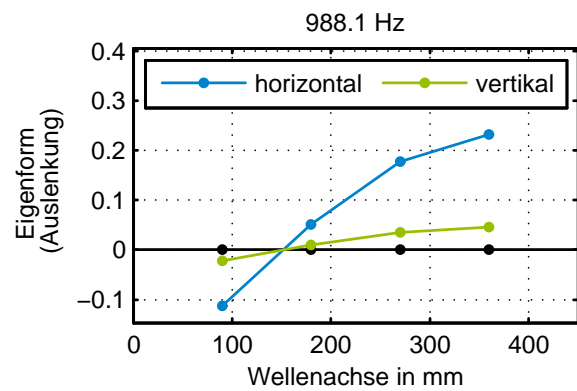


(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 140: 20. numerisch ermittelte Eigenform.



(a) Gehäuse-Eigenform



(b) Wellen-Eigenform

Abbildung 141: 21. numerisch ermittelte Eigenform.

C Elektromechanische Schwingungsbeeinflussung

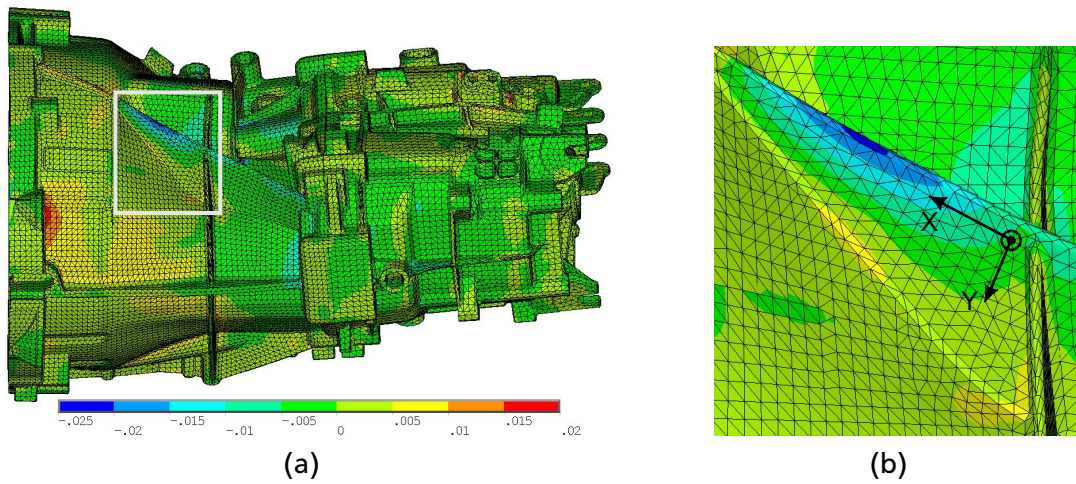


Abbildung 142: Bereich 1 mit großen Dehnungen in x-Richtung des in (b) eingezeichneten lokalen Koordinatensystem.

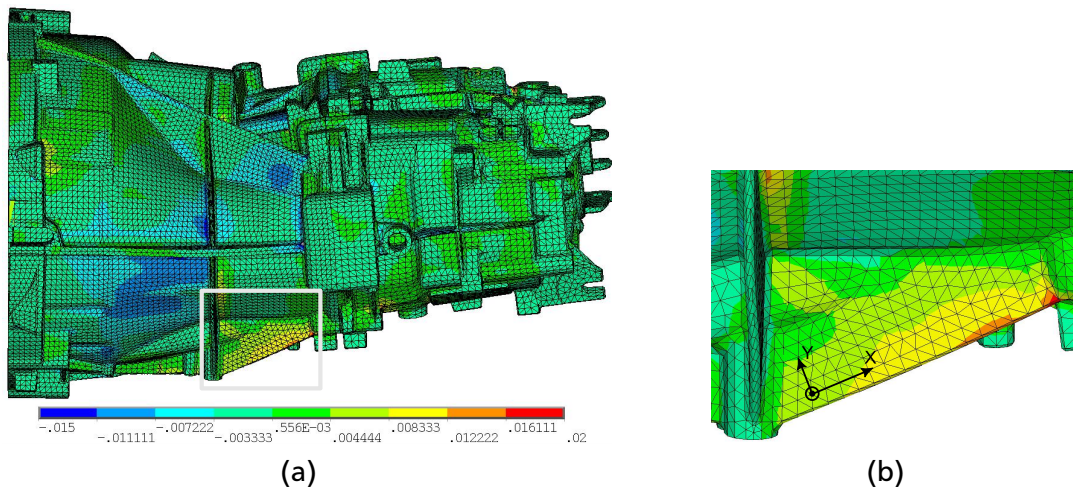
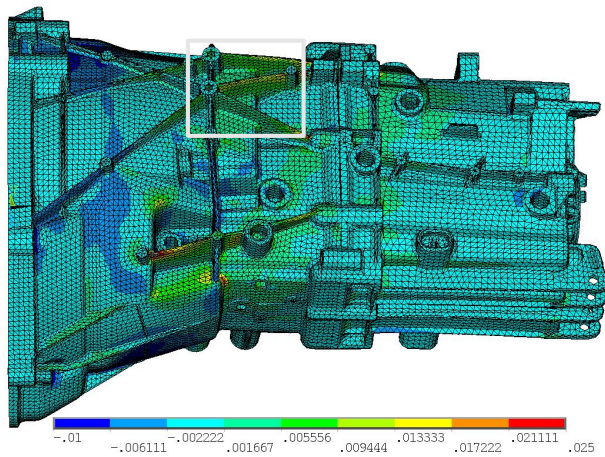
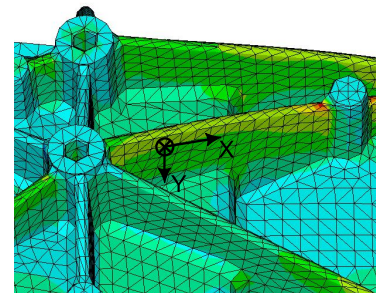


Abbildung 143: Bereich 2 mit großen Dehnungen in x-Richtung des in (b) eingezeichneten lokalen Koordinatensystem.

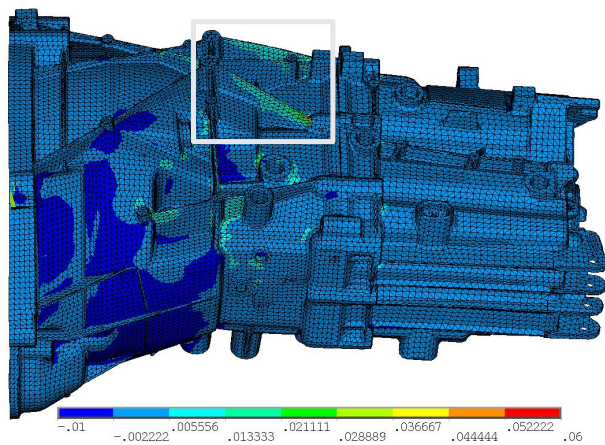


(a)

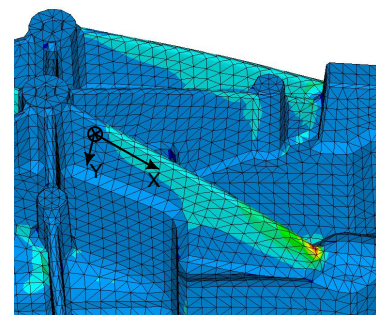


(b)

Abbildung 144: Bereich 3 mit großen Dehnungen in x-Richtung des in (b) eingezeichneten lokalen Koordinatensystem.



(a)



(b)

Abbildung 145: Bereich 4 mit großen Dehnungen in x-Richtung des in (b) eingezeichneten lokalen Koordinatensystem.

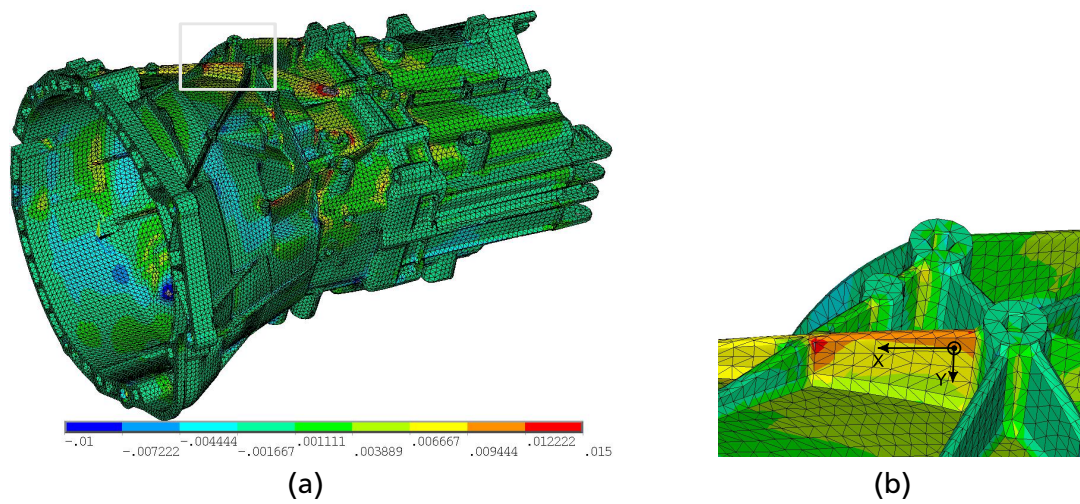


Abbildung 146: Bereich 5 mit großen Dehnungen in x-Richtung des in (b) eingezeichneten lokalen Koordinatensystem.

Literatur

- [1] FISCHER, R.; JÜRGENS, G.; KÜÇÜKAY, F.; NAJORK, R. ; POLLAK, B.: *Das Getriebebuch*. Springer-Verlag, Wien, 2012
- [2] NAUNHEIMER, H.; BERTSCHE, B. ; LECHNER, G.: *Fahrzeuggetriebe*. 2. Springer, 2007
- [3] EULERT, S.; LÜHRS, G.; BRÄUNIG, J. ; KUNZE, H.: Aktive Geräuschkinderung am Hinterachsgetriebe. In: *ATZ* 01/2011 (2011), S. 46–51
- [4] LIU, H.; GUILLOT, M. ; CHENG, L.: Simulation of active vibration control of airplane structural elements using neural networks. In: *Active'99*, 1999, S. 259–270
- [5] STÜTZ, Michael: *Schwingungsminderung an Eisenbahn-Rädern durch Piezo-Aktoren*, Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik der Technischen Universität Berlin, Diplomarbeit, 2005
- [6] HOFFMANN, F.; MAIER, R.; JÄNKER, P. ; HERMLE, F.: Helicopter interior noise reduction by using active gearbox struts. In: *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics Conference)*, 2006
- [7] JEMAI, B.; ICHCHOU, M.N.; NOE, M. ; JEZEQUEL, L.: Piezoceramic sensor and actuator optimal location in modal control of complex flexible structure. In: *Active'97*, 1997
- [8] BUCKERT, S.: *Bewertung adaptiver Strukturen auf Basis der Strukturintensität*, Technische Universität Darmstadt, Fachgebiet Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik, Diss., 2013
- [9] DUCARNE, J.; THOMAS, O. ; DEÜ, J.-F.: Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction. In: *Journal of Sound and Vibration* 331 (2012), S. 3268–3303
- [10] XU, B.; OU, L.P. ; JIANG, J. S.: Integrated optimization of structural topology and control for piezoelectric smart plate based on genetic algorithm. In: *Finite Elements in Analysis and Design* (2013)
- [11] HAGOOD, N. W.; FLOTOW, A. von: Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks. In: *Journal of Sound and Vibration* 146(2) (1991), S. 243–268
- [12] MOHAMMADI, S.: *Semi-passive vibration control using shunted piezoelectric materials*, INSA, Lyon, Diss., 2008
- [13] HAN, L.; WAND, X. D. ; SUN, Y.: The effect of bonding layer properties on the dynamic behaviour of surface-nonded piezoelectric sensors. In: *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008), S. 5599–5612

-
-
- [14] PIETRZAKOWSKI, M.: Active damping of beams by piezoelectric system: effect of bonding layer properties. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), S. 7885–7897
- [15] NEUBAUER, M.; OLESKIEWICZ, R. ; POPP, K.: Comparison of Damping Performance of Tuned Mass Dampers and Shunted Piezo Elements. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 5 (2005), S. 117–118
- [16] SÉNÉCHAL, A.; THOMAS, O. ; DEÛ, J.-F: Optimization of Shunted Piezoelectric Patches for Vibration Reduction of Complex Structures - Application to a Turbojet Fan Blade. In: *Proceedings of the ASME IDETC/CIE*, 2010
- [17] RINGWELSKI, S.; LUFT, T. ; GABBERT, U.: Design of active noise and vibration control for car oil pans using numerical simulations. In: *Cansmart*, 2009. - International Workshop, Smart Materials and Structures
- [18] JAKOB, A.; STÜTZ, M.; FELDMANN, J. ; MÖSER, M.: Experiments on active vibration control of a scale model rail wheel. In: *Proceedings of Euronoise 2006, Tampere, Finland*, 2006
- [19] LUFT, T.; RINGWELSKI, S.; GABBERT, U.; HENZE, W. ; TSCHÖKE, H.: Noise Reduction Potential of an Engine Oil Pan. In: *Proceedings of the FISITA 2012 World Automotive Congress Bd.* 201. Springer Berlin Heidelberg, 2013. - ISBN 978-3-642-33831-1, S. 291–304
- [20] PIERSOL, A. G.; PAEZ, T. L.: *Harris' Shock and Vibration Handbook, Sixth Edition*. McGraw-Hill, New York, 2010. - ISBN 978-0-07-163343-7
- [21] HANSEN, C.; SNYDER, S.; QIU, X.; BROOKS, L. ; MOREAU, D.: *Active Control of Noise and Vibration, Second Edition*. CRC Press, Boca Raton, 2012. - ISBN 978-0-415-59061-7
- [22] MAXWELL, J. C.: On Reciprocal Figures, Frames, and Diagramms of Forces. In: *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 26 (1872), S. 1–40. - Tafel 1-3
- [23] LOEWY, A.: Begleitmatrizen und lineare homogene Differentialausdrücke. In: *Mathematische Zeitschrift* 7 (1920), S. 58–125
- [24] BOSCH, S.: *Lineare Algebra*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008. - ISBN 978-3-540-76437-3
- [25] KOLLMANN, F. G.; SCHÖSSER, T. F. ; ANGERT, R.: *Praktische Maschinenakustik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006. - ISBN 978-3-540-20094-9
- [26] WILLIAMS, R.; CROWLEY, J. ; VOLD, H.: The Multivariate Mode Indicator Function in Modal Analysis. In: *Proceedings of IMAC III*, 1985
- [27] ALLEMANG, R. J.; BROWN, D. L. ; PHILLIPS, A. W.: Survey of Modal Techniques Applicable to Autonomous/Semi-Autonomous Parameter Identification. In: *Proceedings of ISMA 2010*, S. 3331–3372
- [28] *Brüel & Kjær*. Test for I-deas, Version 6.1

-
- [29] MÖSER, M. (Hrsg.): *Messtechnik der Akustik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010. - ISBN 978-3-540-68086-4
- [30] EWINS, D. J.; ROBERTS, J. B. (Hrsg.): *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. Research Studies Press Ltd, Philadelphia, 2000. - ISBN 0 86380 218 4
- [31] *NX-I-deas 6.1m1 Help Library, Modal Analysis User's Guide*
- [32] BROWN, D.; ALLEMANG, R.; ZIMMERMAN, R. ; MERGEAY, M.: *Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis*. SAE Technical Paper 790221, 1979
- [33] VERBOVEN, P.: *Frequency Domain System Identification for Modal Analysis*, Vrije Universiteit Brussel - Faculteit Toegepaste Wetenschappen, Diss., 2002
- [34] AUWERAER, H. V.; GUILLAUME, P.; VERBOVEN, P. ; VANLANDUIT, S.: Application of a Fast-Stabilizing Frequency Domain Parameter Estimation Method. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 123 (2001), S. 651-658
- [35] TROYER, T. D.; GUILLAUME, P. ; STEENACKERS, G.: Fast variance calculation of polyreference least-squares frequency-domain estimates. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 23 (2009), S. 1423-1433
- [36] RAUCH, R.: *Numerische und experimentelle Strukturuntersuchung eines FFahrzeuggetriebe mit dem Ziel der aaktive Geräuschminderung*, Technische Universität Darmstadt, Institut für Mechatronische Systeme im Maschinenbau, Diplomarbeit, 2012
- [37] IBRAHIM, S. R.: Modal Confidence Factor in Vibration Testing. In: *Journal of Spacecraft and Rockets* 15 (1987), S. 313-316
- [38] ALLEMANG, R. J.: The Modal Assurance Criterion - Twenty Years of Use and Abuse. In: *Sound and Vibration Magazine* (2003), August, S. 14-21
- [39] GUILLAUME, P.; VERBOVEN, P.; VANLANDUIT, S.; AUWERAER, H. V. ; PEETERS, B.: A Poly-Reference Implementation Least Squares Complex Frequency Domain Estimator. In: *Proceedings of IMAC XXI, The International Modal Analysis Conference*, 2003
- [40] BATHE, K.-J.: *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, 1996. - ISBN 0-13-301458-4
- [41] GRIMES, R. G.; LEWIS, J. G. ; SIMON, H. D.: A Shifted Block Lanczos Algorithm For Solving Sparse Symmetric Generalized Eigenproblems. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 15 (1994), S. 228-272
- [42] ANSYS® Academic Research, Release 14.0, Help System, ANSYS Mechanical APDL Theory Reference, Ansys, Inc.
- [43] WISSMANN, J.; SARNES, K.-D.: *Finite Elemente in der Strukturmechanik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006. - ISBN 978-3-540-61836-2
- [44] KNOTHE, K.; WESSELS, H.: *Finite Elemente, Eine Einführung für Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008. - ISBN 978-3-540-72188-8

-
- [45] MADENCI, E.; GUVEN, I.: *The Finite Element Method and Application in Engineering Using ANSYS®*. Springer Science+Business Media, LLC, 2006. - ISBN 978-0387-28289-3
- [46] ANSYS® Academic Research, Release 14.0, Help System, ANSYS Mechanical APDL Command Reference, Ansys, Inc.
- [47] IMAOKA, S.: *ANSYS.NET Tips and Tricks: CERIG vs RBE3, RIGID184*. 2002. http://ansys.net/ansys/ansys_tips.html
- [48] ANSYS® Academic Research, Release 14.0, Help System, ANSYS Mechanical APDL Contact Technology Guide, Ansys, Inc.
- [49] ANSYS® Academic Research, Release 14.0, Help System, ANSYS Mechanical APDL Modeling and Meshing Guide, Ansys, Inc.
- [50] WU, Y.-X.: *Sensitivity-Based Finite Element Model Updating Methods with Application to Electronic Equipments*, Faculté Polytechnique de Mons, Belgium, Diss., 1999
- [51] MARWALA, T.: *Finite-Element-Model Updating Using Computational Intelligence Techniques*. Springer-Verlag, London, 2010. - ISBN 978-1-84996-322-0
- [52] MODAK, S. V.; KUNDRA, T. K. ; NAKRA, B. C.: Comparative study of model updating methods using simulated data. In: *Computers and Structures* 80 (2002), S. 437-447
- [53] MOTTERSHEAD, J. E.; LINK, M. ; FRISWELL, M. I.: The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 25(11) (2011), S. 2275-2296
- [54] DESFORGES, M. J.; COOPER, J. E. ; WRIGHT, J. R.: Mode Tracking During Flutter Testing Using the Modal Assurance Criterion. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 1996
- [55] EWINS, D.J.: Model validation: Correlation for updating. In: *Sadhana* 25 (2000), S. 221-234
- [56] HONSEL, *Handbuch der Gusswerkstoffe*. http://www2.honsel.com/uploads/media/Handbuch_Gusswerkstoffe_01.pdf. - (heruntergeladen am 20.02.2014)
- [57] MACE, B. R.; MANCONI, E.: Mode veering in weakly coupled systems. In: *Proceedings of ISMA2012*, S. 3211-3222
- [58] BALMÈS, E.: High Modal Density, Curve Veering, Localization: A Different Perspective on the Structural Response. In: *Journal of Sound and Vibration* 161(2) (1993), S. 358-363
- [59] MOHEIMANI, S. O. R.; FLEMING, Andrew J.: *Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping*. Springer, 2006. - ISBN 978-1-84628-331-4
- [60] IEEE Standard on Piezoelectricity. In: *ANSI/IEEE Std 176-1987* (1988)
- [61] BIESEWSKI, A.: *Vergleich verschiedener Ansätze zur Schwingungsdämpfung eines Automobil-Getriebes mittels Piezo-Patches*, Technische Universität Darmstadt, Institut für Mechatronik

-
- sche Systeme im Maschinenbau, Diplomarbeit, 2012
- [62] GMBH, Johnson Matthey Piezo P: *Datasheet Piezoceramic Masses*. Dezember 2014
- [63] *Datenblatt DuraAct Flächenwandler P-876*. - Physik Instrumente (PI) GmbH und Co. KG, 2013
- [64] ALLIK, H.; HUGHES, T. J. R.: Finite Element Method for Piezoelectric Vibration. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2 (1970), S. 151–157
- [65] ELLIOTT, S. J.: *Signal Processing for Active Control*. Academic Press, 2001
- [66] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2*. Springer Berlin Heidelberg, 2006
- [67] ADAMY, J.: *Systemdynamik und Regelungstechnik II*. Shaker Verlag, Aachen, 2007
- [68] MARSZOLEK, M.: *Entwicklung eines Versuchsstandes zur Untersuchung des Temperaturverhaltens piezoelektrischer Stapelaktoren*, TU Darmstadt, Mechatronik im Maschinenbau, Diss., 2011
- [69] HÅKANSSON, L.: *The Filtered-x LMS Algorithm*. Department of Telecommunications and Signal Processing, University of Karlskrona/Ronneby
- [70] KUO, S. M.; MORGAN, D. R.: *Active Noise Control Systems; Algorithm and DSP Implementation*. Wiley, New York, 1996. - ISBN 0-471-13424-4
- [71] KERN, S.: *Erhöhung der Prozessstabilität durch aktive Dämpfung von Frässpindeln mittels elektromagnetischer Aktoren*, MiM, TU Darmstadt, Diss., 2008
- [72] SCHITTENHELM, R. S.; BREVERN, S.; RIEMANN, B. ; RINDERKNECHT, S.: Aktive Schwingungsminderung an einem gyroskopiebehafteten Rotorsystem mittels des FxLMS-Algorithmus. In: *Tagungsband der SIRM 2013*
- [73] ARDEKANI, I. T.; ABDULLA, W. H.: Theoretical convergence analysis of FxLMS algorithm. In: *Signal Processing* 90 (2010), S. 3046–3055
- [74] PLATTEN, M. F.; FITTON-HAYWARD, M.: Eliminating Gear Whine. In: *Gear Solutions*, Januar 2012
- [75] HENN, H.; SINAMBARI, Gh. R. ; FALLEN, M.: *Ingenieurakustik: Physikalische Grundlagen und Anwendungsbeispiele*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008